

## TD n°8. Résolution des systèmes linéaires

**Exercice 1.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} x - iy = 1 \\ ix - y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} ix - iy = 1 + i \\ ix + y = 1 - i \end{cases} ; \begin{cases} (1 + i)x + (1 - i)y = i \\ (1 - i)x + (1 + i)y = 1 - i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + i)x + iy = 0 \\ 2x + (1 + i)y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x - iy = 1 \\ ix + y = i \end{cases} ; \begin{cases} (1 + i)x + iy = -1 + i \\ (1 - 3i)x + (2 - i)y = 3 + 2i \end{cases}$$

**Exercice 2.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases} ; \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ -x + y + 2z + 3t = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x - y + z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 7z + 4t = -1 \end{cases}$$

**Exercice 3.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

**Exercice 4.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 5y - 5z = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 2 \\ x - 2y + 5z = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + y - 4z = 2 \\ -x + y + z = 1 \\ x + 5y - 5z = -1 \end{cases}$$

**Exercice 5.** Résoudre :

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1 \\ 2x + y - 2z - t = 2 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 2y - z + 2t = 1 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + t = 1 \\ x - y + 3z + t = 1 \end{cases}$$

**Exercice 6.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 4y - z + 2t = 0 \\ x + 14y + 5z - 8t = 0 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + 4t = 1 \\ 5x - y + 3z + 5t = 5 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 6x - 11y + 2z - 9t = 2 \\ 2x + y - 2z - t = 1 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{array} \right.$$

**Exercice 7.** Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres réels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Autrement dit, trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  pour que les systèmes admettent des solutions, et, lorsque ces conditions sont vérifiées, trouver toutes les solutions en fonction des paramètres.

$$\left\{ \begin{array}{l} -x - 4y - 2z = \alpha \\ x - 3y - z = \beta \\ 2x + 4y + z = \gamma \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} -x + y + z = \alpha \\ y + 3z = \beta \\ x + z = \gamma \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = \alpha \\ 3x - 2y + 3z = \beta \\ -x + y - z = \gamma \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y + z = \alpha \\ x + 2y - z = \beta \\ 4x - y + 2z = \gamma \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x - y + 2z = \alpha \\ 3x - y - z = \beta \\ x + y - 5z = \gamma \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 4z = \alpha \\ -x + y + z = \beta \\ x + 5y - 5z = \gamma \end{array} \right.$$

**Exercice 8.** On rappelle que  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ , et que  $1 + j + j^2 = 0$ . Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres  $a, b \in \mathbb{C}$  pour que le système suivant d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$  admette des solutions, puis le résoudre.

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + jy + j^2z = a \\ j^2y + jz = b \end{array} \right.$$

**Exercice 9.** Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres réels  $\alpha$  et  $\beta$ , pour que les systèmes suivants admettent des solutions, puis les résoudre en fonction des paramètres.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 6z = \alpha \\ 3x + y + 3z = 1 \\ 6x + 6y + z = 1 \\ 7x + 9y + 7z = \beta \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 3x - y - 2z = \alpha \\ -x + 3y - z = \beta \\ -2x - 2y + 3z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 2z = \alpha \\ x + 2y + z = \beta \\ x + y + z = 1 \\ 4x + 3y + 4z = 0 \end{array} \right.$$

**Exercice 10.** Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres réels  $a$  et  $b$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + y = 1 \\ bx + y = 2 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} ay + az = ab \\ bz = a \\ x + y + z = 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ y = 1 \\ bx - z = b - a \end{array} \right.$$

**Exercice 11.** Résoudre le système suivant en fonction des paramètres réels  $a$  et  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

$$\begin{cases} x + ay - az = \alpha \\ -ax + y + az = \beta \\ ax - ay + z = \gamma \end{cases}$$

---

### Applications

---

**Exercice 12. Problème des boeufs de Newton**

Sachant que soixante-quinze bœufs ont brouté en douze jours l'herbe d'un pré de soixante ares et que quatre-vingt-un bœufs ont broutés en quinze jours l'herbe d'un pré de de soixante-douze ares, combien faut-il de bœufs pour brouter en dix-huit jours l'herbe d'un pré de quatre-vingt-seize ares ?

On suppose que, dans les trois prés, l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des bœufs et qu'elle continue de croître uniformément après leur entrée. On suppose également que les bœufs broutent à un rythme constant.

**Exercice 13.** Trouver des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto 2x^2 - 6x + 5$  s'écrive sous la forme  $x \mapsto ax + bx(x - 1) + cx(x - 1)(x - 2)$ . Y a-t-il plusieurs choix possibles pour  $a$ ,  $b$  et  $c$  ?

**Exercice 14.** Trouver des réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la fonction

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x(x - 1)(x + 2)}$$

s'écrive sous la forme

$$x \mapsto \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 2}.$$

En déduire une primitive de  $f$ . Y a-t-il plusieurs choix possibles pour  $a$ ,  $b$  et  $c$  ? Note : dans un chapitre ultérieur, nous verrons des méthodes plus rapides pour résoudre cet exercice.