TD n°9. Compléments sur les fonctions

Exercice 1. Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont injectives, surjectives, bijectives, et préciser dans ce dernier cas la fonction réciproque. Prendre soin aux ensembles d'arrivée et aux domaines de définition des fonctions.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2, \quad f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2, \quad f_3 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2, \quad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3,$$

$$f_5 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x, \quad f_6 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*, x \mapsto 1/x, \quad f_7 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x^2, \quad f_8 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, x \mapsto 1/x^2,$$

$$\phi : \mathbb{R} \setminus 2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x-1}{x-2}, \quad \psi : \mathbb{R} \setminus 2 \to \mathbb{R} \setminus 1,\ x \mapsto \frac{x-1}{x-2}.$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1-e^{-x}}$. Est-elle injective ? Surjective ? Quelle est son image ? En déduire que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un certain intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

Exercice 3. Montrer que les fonctions cos, sin, tan, ch ne sont pas injectives. Montrer que sh et th sont injectives. Vues comme fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, lesquelles parmi ces fonctions sont bijectives ? Dans tous les cas, calculer leurs images.

Exercice 4. Préciser le domaine de définition et de dérivabilité, puis dériver les fonctions suivantes : $\arccos(\frac{1}{x})$, $\arccos(\sqrt{x})$, $\arccos(\mathrm{ch}x)$, $\sqrt{\arccos(x)}$, $\sqrt{\arcsin(x)}$, $\sqrt{\mathrm{argch}(x)}$, $\sqrt{\mathrm{argsh}(x)}$, $\arcsin(x^3)$, $\arccos(e^x)$, $\mathrm{argch}(e^x)$, $\arccos(\ln x)$, $(\arccos(x))^2$, $(\arcsin(x))^3$, $e^{\mathrm{argsh}(x)}$, $e^{\arcsin(\mathrm{x})}$, $\mathrm{sh}(\arcsin(x))$, $\ln(\mathrm{argsh}(x))$, $\ln(\arcsin(x))$, $\cos(\mathrm{argsh}(x))$, $\mathrm{ch}(\arcsin(x))$, $\cos(\arcsin(x))$, $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})$.

Exercice 5. Calculer les valeurs exactes de $\mathrm{Arccos}(\cos(2\pi/3))$, $\mathrm{Arccos}(\cos(-2\pi/3))$, $\mathrm{Arccos}(\cos(4\pi/3))$, $\mathrm{Arctan}(\tan(3\pi/4))$, $\mathrm{Arctan}2 + \mathrm{Arctan}5 + \mathrm{Arctan}8$, et si $x \in [-1, 1]$, $\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x)$.

Exercice 6. Étudier la fonction d'une variable réelle $x \mapsto \mathrm{Arccos}(1-2x^2)+\mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$. (Domaine de définition et étude complète : variations, limites, etc.)

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes sur leur domaine de définition :

$$(1+t^2)y' + y = 0, \quad y' + \frac{y}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad y' + \frac{y}{\sqrt{t^2-1}} = 0, \quad y' + \frac{y}{\sqrt{t^2+1}} = 0.$$

Exercice 8. Les fractions rationnelles suivantes sont-elles des éléments simples ? Lorsque c'est le cas, donner une primitive.

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x-1}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{3}{x^2-1}, \quad \frac{1}{(x-1)^3}, \quad \frac{x+1}{(x-1)^3}, \quad \frac{6}{x^2+1}, \quad \frac{4x+3}{x^2+1}, \quad \frac{x^2+3}{x^2+1}, \quad \frac{x^2+3}{(x^2+1)^2},$$

$$\frac{2x+7}{(x^2+1)^2}, \quad \frac{x^2-1}{x^3-1}$$

Exercice 9. Primitiver les fonctions Arcsin, Arccos, Arctan, Argsh, Argch et Argth par une IPP, comme le logarithme.

Exercice 10. Préciser les pôles (réels et complexes), le degré, puis décomposer en éléments simples réels et primitiver les fractions rationnelles suivantes.

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+2)(3x+4)}, \quad \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)(x+2)^2}, \quad \frac{x+1}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}, \quad \frac{x+1}{x-1}, \quad \frac{x^2+x+1}{x-1}.$$

Exercice 11. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{5x-12}{x(x-4)}dx, \int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx, \int \frac{6x-11}{(x-1)^2}dx, \int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx, \int \frac{2x^2-15x+33}{(x+1)(x-5)}dx.$$

Exercice 12. Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes.

$$\frac{x^3}{x^2-4}, \quad \frac{4x}{(x-2)^2}, \quad \frac{x+1}{x(x-2)^2}, \quad \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{1}{x^3-7x+6}.$$

Exercice 13. Reconnaître une forme $f'(g(x)).g'(x)$ et en déduire une primitive des fonctions suivantes :

$$x\sin(x^2), \quad \frac{e^x}{\sqrt{5-e^x}}, \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad \frac{x}{(x^2-4)^2}, \quad \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}^3(x), \quad \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

Exercice 14. Reconnaître une forme $f'(g(x)).g'(x)$ et en déduire une primitive des fonctions suivantes :

$$\int \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}, \int \frac{\cosh(x)dx}{1+\sinh^2(x)}, \int \frac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}, \int \frac{\arcsin(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int \frac{\arctan(x)dx}{1+x^2}, \int \sqrt{\sinh(x)}\cosh(x)dx,$$

$$\int \frac{dx}{\tan(x)(1+x^2)}, \int \frac{e^x dx}{\cos^2(e^x)}, \int \left[1+\tan^2(\sin(x))\right]\cos(x)dx, \int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}, \int e^{\sin(x)}\cos(x)dx, \int \frac{e^{\arctan x}dx}{1+x^2},$$

$$\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}, \int \cos(\cos(x))\sin(x)dx, \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\arctan x}}, \int \frac{\cos(x)dx}{2+\sin(x)}.$$

Exercice 15. Dans les deux exercices précédents, rédiger le calcul de primitive à l'aide d'un changement de variable (celui qu'on voit dans la forme $f'(g(x)).g'(x)$).

Exercice 16. Calculer $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x+2}}$, $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}}$, en faisant les changements de variable $u = \sqrt{x+2}$, $x = sin(u)$, $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, et $u = x^4$. Pour la dernière primitive, on pourra faire un second changement de variable $v(u) = \sqrt{1-u}$ après le premier.

Exercice 17. Calculer les primitives suivantes à l'aide d'un changement de variable simple

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}, \int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}\,dx, \int \frac{dx}{49-4x^2}, \int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^4}}, \int e^x\cos(e^x+1)dx$$

Exercice 18. Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$y' - ty = 1 + t + t^2, \quad y' + \tan(t)y = \sin(t) + \cos(t), \quad t^3y' + 4(1-t^2)y = 0,$$

Penser au principe de superposition pour les solutions particulières.