Université de Lorraine | Faculté des Sciences et Technologies
Licences Mathématiques, SPI EEAPR et Informatique | Automne 2015

Calculs et Mathématiques
Épreuve du 20 Novembre 2015

Documents et calculatrices interdits. Durée 2h.
Encadrer les résultats. Le soin sera noté. Le sujet comporte deux pages.

Exercice 1. (Questions de cours)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.
2. Écrire les formules d'Euler.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $z \in \mathbb{C}$. Que signifie, par définition, l'assertion « z est une racine $n-$ième de l'unité » ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire explicitement, sous forme exponentielle, les racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 2. Préciser le domaine de définition dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante et la résoudre.

$$\ln(\sqrt{5 - x^2} - 1) = 1.$$

(On rappelle que $2,7 < e < 2,8$)

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $iz^2 - z - 1 - i = 0$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $(z + 1)^4 = (z + 2)^4$.

Exercice 5. Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int x^2 \cos(x^3)dx$
2. $\displaystyle\int (x + 1) \cos(3x)dx$
3. $\displaystyle\int x^2 \sin(x)dx$
4. $\displaystyle\int \frac{(\ln(x))^2}{x}dx$
5. $\displaystyle\int \sin(x) \cos^2(x)dx$
6. $\displaystyle\int \sin^4(x)dx$

Exercice 6. On définit

$$I = \int_0^{\ln(16)} \frac{e^x + 3}{e^x + 4}dx \text{ et } J = \int_0^{\ln(16)} \frac{1}{e^x + 4}dx.$$

Calculer $I - 3J$ et $I + J$. En déduire I et J.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $]2, 3[$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

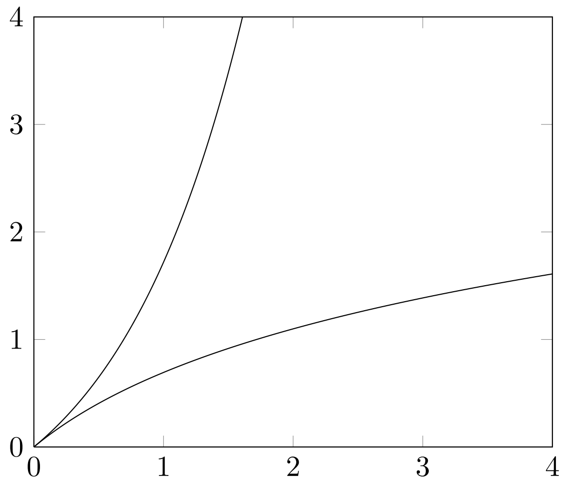
1. Trouver les deux réels a et b tels que l'on ait $\forall x \in]2; 3[,\ f(x) = \dfrac{a}{x - 2} + \dfrac{b}{x - 3}$.
2. En déduire une primitive de f.

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'(t) + \cos(t)y(t) = e^{-\sin(t)}.$$

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $I(a) = \int_0^a \ln(1+x)dx$.

1. Calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.
2. On se propose de calculer $I(a)$ d'une autre manière, sans intégration par parties. On a tracé ci-dessous les graphes de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto e^x - 1$ sur l'intervalle $[0, 4]$. On admet que les deux courbes sont les symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.



En utilisant des considérations d'aires, démontrer que

$$I(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1)dx.$$

3. En déduire à nouveau $I(a)$.

Exercice 10. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ le réel $I_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx)dx$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi],\ |e^x \sin(nx)| \leq e^\pi$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, en déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |I_n| \leq \frac{\pi e^\pi}{n}$.
3. (Bonus) En déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.