

2. Fonctions usuelles - Partie I

Domaine de définition, limites, parité, périodicité

Exercice 1. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x}{4+x}$
2. $f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x+4}\right)$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
4. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}}$
5. $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 1)$
6. $f(x) = \tan\left(\frac{x+1}{x-1}\pi\right)$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elles sont paires, impaires, périodiques (et, dans ce dernier cas, en déterminer la période).

1. $f(x) = \cos(3x)$
2. $f(x) = e^x$
3. $f(x) = e^{\sin(2x)}$
4. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

Exercice 3. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 14x + 20}$
2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 14x + 20}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x + 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x-1))$
5. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^x}{x^4 + 1}$
6. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2^{x+3}}{e^x}$
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - 3x)$

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x) + 1}{\ln(x) - 1}$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$

Calcul de dérivées

Exercice 4. Domaine de définition, de dérivabilité, et dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1$
2. $f(x) = \ln(3x - 2)$
3. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$
4. $f(x) = \cos^7(x)$
5. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-3x+2}$
6. $f(x) = \frac{x^5}{\ln(x)}$
7. $f(x) = \cos^2(x)$;
8. $f(x) = \cos(6x - 5)^5$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$
10. $f(x) = e^{3x+1}(3x^2 + 5)$
11. $f(x) = \cos(-x + 3)e^{5x+2}$
12. $f(x) = \left(\frac{1}{\ln(2x)}\right)^5$
13. $f(x) = \frac{\cos(-x+3)}{e^{5x+2}}$
14. $f(x) = \frac{e^{2x+3}}{x^2-2x+1}$
15. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\ln x^2 - 1}$
16. $f(x) = \ln(x - 5) + \ln(3 - x)$
17. $f(x) = \ln((x - 5)(3 - x))$
18. $f(x) = \ln(x - 3) + \ln(5 - x)$
19. $f(x) = \ln((x - 3)(5 - x))$
20. $f(x) = e^x \ln(x)$;
21. $f(x) = (x^2 + 1)e^x + (x + 1) \ln(x)$
22. $f(x) = e^{x^2+2x+1}$
23. $f(x) = \ln(3x^2 + 2)$

Exercice 5. Domaine de définition, de dérivabilité, et dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(\cos(x))$
2. $f(x) = \cos(\sin(x))$
3. $f(x) = \cos(e^x)$
4. $f(x) = e^{e^x}$
5. $f(x) = \cos(2x^2 + 3x + 5)$
6. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$
7. $f(x) = e^{\frac{1}{3x^2+2}}$
8. $f(x) = e^{\cos(x)}$
9. $f(x) = \ln(\ln(x))$
10. $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x)}$
11. $f(x) = \cos(x^2 + 2x)$
12. $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{\cos(x)}$
13. $f(x) = \cos(\ln(x))$
14. $f(x) = \ln(\cos(x))$
15. $f(x) = \sin(x) \ln(2x + 3) + \cos(x^2 + 1)e^x$
16. $f(x) = e^{\cos(\ln(x))}$
17. $f(x) = \cos(\cos(\cos(x)))$

Exercice 6. Domaine de définition, de dérivabilité, et dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2^x - 3^x$
2. $f(x) = x^x$
3. $f(x) = (1 - x^2)^x$
4. $f(x) = (x^x)^x$
5. $f(x) = x^{(x^x)}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
7. $f(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$
8. $f(x) = \sin(x^{\cos(x)})$
9. $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Logarithme, Exponentielle et Puissance

Exercice 7. Dire lesquelles des propositions suivantes sont vraies. Lorsqu'elles sont fausses, le prouver par un contre-exemple.

1. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a^{x-y} = a^x/a^y$
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a^{(x^y)} = (a^x)^y$
3. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, a^{2xy} = a^{x^2} a^{y^2}$
4. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a^b) = \ln(a)^{\ln(b)}$
5. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(ab/2) = \sqrt{\ln(a) \ln(b)}$
6. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln((a^2)^b) = 2b \ln(a)$
7. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ln(a^2/b^2) = -2 \ln(ab)$

Exercice 8. Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R} , après avoir déterminé le domaine de \mathbb{R} sur lequel elles ont un sens :

1. $e^{5x-3} = 1$
2. $e^{5x-3} = e^{2x^2}$
3. $e^{x-1} e^{x-2} - e^{x-3} e^{x-4} = 0$
4. $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$
5. $(e^{5x+1} - 1)(e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1) = 0$
6. $\ln(2x - 3) = \ln(2)$
7. $\ln(2x - 3) = -2$
8. $\ln(x) = \ln(x + 5) - \ln(2)$
9. $\ln(x) = \ln(x + 5) + \ln(2)$
10. $\ln(2x + 1) + \ln(x - 2) = \ln(x)$
11. $\ln(x) = \ln(5 - x) + \ln(3)$
12. $\ln(x) = \ln(5 - x) + \ln(6)$
13. $\ln|x| = \ln|5 - x| + \ln(6)$
14. $(\ln(x))^2 = 2$

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R} :

1. $2^{x+1} - 2^{3x} = 0$
2. $(e^x)^2 = 2$
3. $(e^x + 1/2)^2 = 1$
4. $2^x = 3^x/2$
5. $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$

Exercice 10. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* les équations suivantes :

1. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
2. $x^x = \sqrt{x}$