3. Fonctions usuelles - Partie II

Trigonométrie

Exercice 1. Calculer les quantités suivantes :

1. $A = \sin(15\pi/2)$
2. $B = \cos(9\pi/2)$
3. $C = \sin(7\pi/4)$
4. $D = \cos(-7\pi/4)$
5. $E = \sin(-7\pi/6)$
6. $F = \cos(11\pi/6)$
7. $G = \sin(14\pi/3)$
8. $H = \cos(-5\pi/3)$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \pi$
2. $\cos(x) = -1/2$
3. $\sin(x) = \sqrt{3}/2$
4. $\cos(x) = \sin(x)$
5. $\cos(x) = \sin(x - \pi/2)$
6. $\sin(2x) = \sin(3x)$
7. $\sin(2x) + \sin(x) = 0$
8. $\cos^2(x) = \cos(2x)$
9. $\dfrac{1}{2}\cos(x) + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$
10. $|\cos(nx)| = 1$, $(n \in \mathbb{N}^*)$

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\cos(2x) + \sqrt{3}\sin(2x) \leq \sqrt{2}$
2. $\cos(5x) + \cos(3x) \leq \cos(x)$
3. $2\sin^2(x) - 3\sin(x) - 2 > 0$

Fonctions réciproques

Exercice 4. Montrer que la fonction $f :]-1, 0[\longrightarrow]0, 1[$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

est bijective et déterminer sa fonction réciproque f^{-1}

Exercice 5. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$g(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}.$$

est bijective et déterminer sa fonction réciproque g^{-1}.

Études de fonctions

Exercice 6. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3. Calculer la dérivée et dresser le tableau des variations de f.
4. La fonction f possède-t-elle des asymptotes à l'infini ?
5. Tracer le graphe de la fonction f.

Exercice 7. Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et le signe de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition.
3. Dresser le tableau des variations de la fonction f. La fonction f admet-elle des extrema locaux ?
4. La fonction f admet-elle des asymptotes horizontales ou obliques à l'infini ? Si oui, les déterminer.
5. Tracer le graphe la fonction f.

Exercice 8. Une population isolée disposant d'un territoire donné commence à se développer, tout en détruisant son environnement par la pollution qu'elle engendre. Pour modéliser cette évolution en fonction du temps t on utilise la fonction $P : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $P(t) = 1000e^{t-\frac{t^2}{10}}$, où $P(t)$ désigne le nombre d'individus de la population à la date t.

1. Calculer $P(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} P(t)$.
2. Étudier les variations de P et préciser son extremum.
3. Déterminer la valeur τ à laquelle la population retrouve son effectif initial $P(0)$.
4. La population s'éteint quand $P(t) < 1$. Déterminer la valeur T à partir de laquelle cela se produit.
5. Tracer le graphe de la fonction P.