4. Nombres complexes, première partie

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (3+2i)(1-i) - (2+i)^2 + (3+i)^3$
2. $z_2 = \frac{1}{i}$
3. $z_3 = \frac{3+5i}{4-i}$
4. $z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i}$
5. $z_5 = \frac{1-5i}{2+i} + \frac{1+5i}{2-i}$
6. $z_6 = (1-i)^2$
7. $z_7 = (1-i)^3$
8. $z_8 = (1-i)^4$

Exercice 2. Calculer

1. $\left|\dfrac{2+5i}{3+4i}\right|$
2. $\left|(3-2i)^4\right|$
3. $|\cos t + i\sin t| \quad (t \in \mathbb{R})$

Exercice 3. Représenter géométriquement les nombres complexes suivants et donner leur forme algébrique

1. $z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}$
2. $z_2 = e^{\frac{i\pi}{4}}$
3. $z_3 = e^{\frac{i\pi}{2}}$
4. $z_4 = e^{\frac{i17\pi}{3}}$
5. $z_5 = e^{i\pi}$
6. $z_6 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$
7. $z_7 = 2e^{\frac{i15\pi}{6}}$
8. $z_8 = 3e^{-\frac{i13\pi}{4}}$
9. $z_9 = 2e^{-\frac{i19\pi}{3}}$

Exercice 4. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants

1. $z_1 = -3$
2. $z_2 = -2i$
3. $z_3 = 1+i$
4. $z_4 = 1-i$
5. $z_5 = 1+i\sqrt{3}$
6. $z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

Exercice 5. Écrire en fonction de $\overline{z}$, les conjugués des complexes suivants :

1. $z_1 = 2+3iz$
2. $z_2 = (1+iz)(1+2z)$
3. $z_3 = \frac{1+iz}{3+z}$
4. $z_4 = \frac{3z^2-2iz+4}{2z-3i}$

Exercice 6. Calculer de deux façons différentes le nombre complexe $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ et en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 7. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (1+i)^{21}$
2. $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 8. Établir que pour tout n entier non nul, le nombre $(1+i)^n + (1-i)^n$ est réel et $(1+i)^n - (1-i)^n$ est imaginaire pur.

Exercice 9. Déterminer les nombres entiers n tels que $(\sqrt{3}-i)^n$ soit réel.

Exercice 10. Soient θ et θ' deux nombres réels. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$. Application : écrire $1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1$ sous forme exponentielle.

Exercice 11. 1. Soit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $1 + z$ et $1 + z + z^2$.

2. Soient z et z' deux nombres complexes de module 1 tels que $zz' \neq 1$. Démontrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel et préciser son module.
3. Soient a et b deux nombres dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et de module 1. Montrer que

$$2\text{arg}\left(\frac{a-1}{b-1}\right) \equiv \text{arg}\frac{a}{b} \ [2\pi].$$

Exercice 12.

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $(1 + i)z + 1 - i = 0$.
2. $(1 - i)\overline{z} + 1 + i = 0$.
3. $z = 2\overline{z} - 2 + 6i$
4. $2z + i\overline{z} = 5 - 4i$
5. $a\overline{z} = z$, suivant les valeurs du paramètre complexe a.

Exercice 13. Résoudre sur le sous-ensemble adéquat de $\mathbb{C}$:

1. $|z - 1| = |z|$.
2. $\frac{z-1-i}{z+1} \in i\,\mathbb{R}$.
3. $i\overline{z} + 5 = z$.
4. $(1 + ia)z + 1 - i = 0$, où a est un paramètre complexe fixé.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 = 4$
2. $z^2 = -9$
3. $z^2 = -8 + 6i$
4. $z^2 = 5 - 12i$
5. $(1 + i)z^2 + 1 - i = 0$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - z - 6 = 0$
2. $z^2 - z + 6 = 0$
3. $z^2 + 2\sqrt{2}i\, z - 2(1 + i) = 0$
4. $z^2 - (5 - 14i)z - 24 - 10i = 0$
5. $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$

Exercice 17. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$.

Exercice 18. Soit a un nombre complexe donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2(1 - i)z + a^2 - 2i = 0 \ .$$

Pour quelles valeurs de a cette équation possède-t-elle au moins une racine réelle ?

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1 + i)z^2 + (1 - 2i)z + 6 + 8i = 0$$

sachant qu'elle possède une solution réelle.

Exercice 20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^2 - 2\overline{z} + 2 - i = 0.$$

Exercice 21. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

Exercice 22. Soient a et b des complexes tels que $\bar{a}b \neq -1$, et $c = \frac{a-b}{1-\bar{a}b}$. Montrer que $|c| = 1 \Leftrightarrow (|a| = 1 \text{ ou } |b| = 1)$.