TD n°5. Nombres complexes, deuxième partie

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter les solutions :

1. $z^3 = 1$.
2. $z^3 = -1$.
3. $z^4 = -i$.
4. $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.
5. $z^6 + 1 = 0$.
6. $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = 1 + j + j^2$
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{2010} j^k$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 - 15z^4 - 16 = 0.$$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1.$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $z^7 = \bar{z}$.
2. $(z-1)^5 = (z+1)^5$.
3. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$.
4. $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

Exercice 6. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Écrire $e^{i3\theta}$ en fonction de $e^{i\theta}$. En déduire l'expression de $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et celle de $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$.
2. Calculer de même $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

Exercice 7. Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^4 x$, $\cos^3 x \sin^3 x$, $\cos^4 x \sin^3 x$.

Exercice 8. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, non multiple de 2π, mettre sous forme algébrique le nombre complexe

$$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{i4\theta} + e^{i5\theta}.$$

En déduire le calcul de

$$S_5 := 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos 5\theta\ ,$$

et de

$$\Sigma_5 := \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta\ .$$

Exercice 9. Soit θ un réel distinct de π modulo 2π et soit

$$t = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}$$

1. Calculer $\frac{2t}{1+t^2}$, $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\frac{2t}{1-t^2}$
2. En déduire que

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\ \cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

Exercice 10. On se propose de déterminer les nombres complexes $z \neq 0$ satisfaisant la condition (H) :

$$(H) \qquad z + \frac{1}{z} \text{ est un nombre réel.}$$

1. Première méthode : en écrivant z sous la forme $z = x + iy$, exprimer la partie imaginaire du nombre complexe $z + \frac{1}{z}$, et trouver la condition sur x et y pour que la condition (H) soit satisfaite. Terminer alors la détermination de l'ensemble des solutions. [Attention à bien obtenir des conditions *nécessaires et suffisantes*.]
2. Deuxième méthode : utiliser z et $\overline{z}$ pour traiter ce même problème.
3. Troisième méthode : utiliser la forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$ pour traiter ce même problème.

Exercice 11. Voici une méthode pour trouver la valeur du nombre réel $c = \cos\frac{2\pi}{5}$. On s'efforcera de faire le moins de calculs possibles. On pose $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. Calculer α^5, puis $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$.
2. Montrer (sans calcul !) que $\beta = \alpha + \alpha^4$ est un nombre réel, puis l'exprimer en fonction de c.
3. Montrer que $\beta^2 + \beta - 1 = 0$.
4. Donner la valeur de c.

Exercice 12. Application : construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2. Soient O' et A les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(0, 2)$. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O' et de rayon 1. On note M le point d'intersection du segment $[AO']$ avec le cercle $\mathcal{C}'$. Enfin, soient B et C les points d'intersection du cercle de centre A et de rayon AM avec le cercle $\mathcal{C}$.

1. Calculer la longueur AM .
2. Calculer la valeur de $\cos\widehat{AOB}$ (on pourra utiliser la formule dite d'Al-Kashi ou de Pythagore généralisée).
3. En utilisant la première partie de l'exercice, calculer $\cos\frac{\pi}{5}$ et montrer que $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{5}$ rad.
4. En déduire une construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas.

Exercice 13.

1. Existe-t-il des nombres entiers a et b tels que $29 = a^2 + b^2$? Même question pour 59 et 61.
2. Soient a, b, c, d quatre nombres entiers. Montrer qu'il existe des nombres entiers A et B tels que
$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = A^2 + B^2.$$
[Indication : utiliser les nombres complexes !]
3. Application : trouver des nombres entiers m et n tels que $1769 = m^2 + n^2$.