6. Calculs de primitives et d'intégrales, première partie

Exercice 1. Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^3}\ dx$
2. $\displaystyle\int \exp(2x)\ dx$
3. $\displaystyle\int \sin(3x)\ dx$
4. $\displaystyle\int x\exp(x^2)\ dx$
5. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ dx$
6. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$
7. $\displaystyle\int \tan^2(x)\ dx$
8. $\displaystyle\int \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x)\ dx$
9. $\displaystyle\int \sin(x)\cos^3(x)\ dx$

Calculs d'intégrales

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle I_1 = \int_0^{2\pi} \cos(x)dx$
2. $\displaystyle I_2 = \int_0^{2\pi} |\cos(x)|dx$
3. $\displaystyle I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}dx.$
4. $\displaystyle I_4 = \int_0^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\ dx$
5. $\displaystyle I_5 = \int_0^{2} (1-|x-1|)^3dx$
6. $\displaystyle I_6 = \int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}dx$

Intégration par parties

Exercice 3. Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int x\ln x\ dx$
2. $\displaystyle\int \ln x\ dx$
3. $\displaystyle\int x^2\ e^{-x}\ dx$
4. $\displaystyle\int e^{3x}\cos(2x)\ dx$
5. $\displaystyle\int \sin(x)\,\mathrm{ch}(x)\ dx$
6. $\displaystyle\int \sin x\ln(\cos(x))\ dx$
7. $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\ dx$
8. $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{sh}(x)\ dx$
9. $\displaystyle\int x^3\cos(x^2)\ dx$
10. $\displaystyle\int 2x(x^2+1)\exp(x^2)\ dx$
11. $\displaystyle\int \sin(\ln(x))dx$

Exercice 4. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$
2. $\displaystyle I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}\cos(x)dx$

Technique de linéarisation

Exercice 5. Déterminer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \sin^5(x)dx$
2. $\displaystyle\int \mathrm{ch}^3(x)dx$
3. $\displaystyle\int \sin(x)\cos^3(x)\ dx$

4. $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos^3(x)\ dx$
5. $\displaystyle\int \cos^3(x)\sin(3x)dx$

Exercice 6. Soient $I = \int_0^{\pi/2} x^2\cos^2(x)dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} x^2\sin^2(x)dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$, par exemple en intégrant par parties.
3. En déduire I et J.

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

1. Calculer I_1 et I_2 en intégrant par parties.
2. En intégrant par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. En déduire I_5.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin(x)dx$.

1. Calculer I_n en intégrant par parties deux fois.
2. Démontrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser le premier terme et la raison.

Exercice 9. Soit $I = \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} e^x\cos(x)dx$. En intégrant par parties deux fois, trouver une équation dont I est solution. En déduire I.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}\setminus 1 \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^{-x}}{1-x}$. Le but de cet exercice est de calculer une valeur approchée de

$$I = \int_0^{1/2} f(x)dx$$

sans calculer une primitive de f.

1. Étudier les variations de f et en déduire :
$$\forall x \in [0, 1/2], \quad 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$
2. Démontrer que pour tout $x \in [0, 1/2]$, on a $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}$ et en déduire que
$$I = \int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx + \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx.$$
3. Calculer $J = \int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx$.
4. Déduire de la première question que
$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{1/2} x^2 f(x)dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}.$$
5. Expliquer comment en déduire une valeur approchée de I à 10^{-2} près. (Vérifier avec une calculatrice si disponible.)

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \int_0^1 e^{-x^2/n}dx$. Ceci définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1],\ e^{-1/n} \leq e^{-x^2/n} \leq 1.$$
2. En déduire par un encadrement que la suite (u_n) admet une limite que l'on calculera.

Exercice 12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $I_n = \int_1^e x^2\ln(x)^n dx$.

1. Calculer I_1 en intégrant par parties.
2. Démontrer l'assertion suivante :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n+1} = e^3/3 - \frac{n+1}{3}I_n.$$
3. En déduire I_2 et I_3.
4. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Montrer que la suite est décroissante.
5. Montrer que la suite est convergente.
6. Montrer que la suite converge vers 0.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x+2)e^{-x}$.

1. Étudier f.
2. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité : 2 cm). Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer l'aire $\mathcal{A}_m$ en cm^2 du domaine limité par $\mathcal{C}$, les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = m$.
3. Quelle est la limite de $\mathcal{A}_m$ lorsque m tend ver $+\infty$?