Systèmes linéaires ou pas – exercices un peu différents

Sauf mention contraire, toutes les inconnues sont réelles.

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants, en précisant éventuellement le domaine de résolution.

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x} = \frac{y+1}{y} \\ \frac{5x+1}{5x-2} = \frac{y-1}{y-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{(x+3)^2+(y-1)^2}{x^2+y^2} = 1 \\ 3x + 2y = 73 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{(x-1)^2-(x-5)^2}{(y+1)^2-(y-1)^2} = 1 \\ 2x - y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1-2x}{3y-4} = \frac{4x+2}{6(2-y)} \\ \frac{x-2}{x+3} = \frac{y}{y-3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 18 \\ \frac{3}{x} - \frac{7}{y} = -55 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{9}{x} + \frac{10}{y} = 75 \\ \frac{12}{x} + \frac{25}{y} = 135 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{4(x-2)} + \frac{7}{3(y-1)} = 41 \\ \frac{5}{2(x-2)} - \frac{3}{5(y-1)} = 11 \end{cases}$$

Exercice 2. On cherche deux nombres (réels). Leur somme vaut 133. Si on les augmente chacun de cinq, leur rapport vaut 4/7. Déterminer l'ensemble des solutions de ce problème.

Exercice 3. La somme de deux nombres entiers x et y est 206. Si l'on divise le plus grand x par le plus petit y, le quotient est 4 et le reste est 1. Quels sont ces nombres ?

Exercice 4. Soient x et y deux réels, avec $y \neq 0$. Leur rapport est x/y. Si on augmente le nombre x de 2, le rapport devient 3. Si on diminue le nombre x de 2, le rapport devient 4. Quels sont ces nombres ?

Exercice 5. La somme de deux nombres x et y est 29. La différence de leurs carrés est 145. Quels sont ces nombres ?

Exercice 6. Trouver deux nombres réels dont la somme vaut 5 et le produit 3.

Exercice 7.
- La différence de deux nombres x et y est 6 et leur produit 216. Quels sont ces nombres ?
- Trouver les dimensions d'un terrain rectangulaire de périmètre 44 m et d'aire 120 m^2.
- Trouver les dimension d'un triangle rectangle d'hypoténuse 13 cm et d'aire 30 cm^2.

Exercice 8. Dans une station de métro, les usagers ont à leur disposition un tapis roulant de 300 m de long. Un piéton marchant à vitesse constante fait l'aller-retour. À l'aller, il met 1 minute et 30 secondes. Au retour, à contresens, il met 4 minutes et 30 secondes. Déterminez la vitesse du piéton et celle du tapis roulant.

Exercice 9. Déterminer s'il existe des triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels qu'on ait les égalités suivantes de fonctions :

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}; \qquad \frac{1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3};$$

$$\frac{x^2+x+1}{x-2} = ax + b + \frac{c}{x-2}; \qquad \frac{1}{x^3-2x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

Exercice 10. Résoudre le système suivant sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur le domaine de définition maximal :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x/y = 2 \end{cases}$$

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ le système suivant :

$$\begin{cases} xyz = 1 \\ xy^2z^4 = 2 \\ xy^3z^9 = 3 \end{cases}$$

Exercice 12. Soient a, b, c trois réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ae^x + bx + c$. On suppose que le graphe de f contient le point de coordonnées $(0, 1)$, et que sa tangente en ce point contient également le point de coordonnées $(2, 3)$. On suppose enfin que le graphe admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\ln(3)$. Déterminer a, b, c.

Exercice 13. Les deux plans affines de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives $2x+3y+z = 1$ et $x-y+2z = 3$ s'intersectent-ils ? Si oui, écrire leur intersection sous forme paramétrée.

Exercice 14. Soient $a_1, ..., a_n$ des points du plan complexe.
Déterminer à quelle(s) condition(s) il existe au moins un polygone à n sommets $z_1, ..., z_n$ tel que :
(a_i est le milieu de $[z_i, z_{i+1}]$ et a_n est le milieu de $[z_n, z_1]$.)

Exercice 15. Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a)} \begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Exercice 16 ($\star$)**.** Résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c = 3 \end{cases}$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 17. Soient a et α deux réels. Résoudre le système d'inconnues x et y

$$\begin{cases} \mathrm{ch}x + \mathrm{ch}y = 2a\mathrm{ch}\alpha \\ \mathrm{sh}x + \mathrm{sh}y = 2a\mathrm{sh}\alpha \end{cases}$$

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes :

$$\text{a)} \begin{cases} \mathrm{pgcd}(x, y) = 5 \\ \mathrm{ppcm}(x, y) = 60 \end{cases} \qquad \text{b)} \begin{cases} x + y = 100 \\ \mathrm{pgcd}(x, y) = 10 \end{cases}$$

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation :

$$\mathrm{pgcd}(x, y) + \mathrm{ppcm}(x, y) = x + y$$