TD n°8. Résolution des systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} x - iy = 1 \\ ix - y = 1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} ix - iy = 1+i \\ ix + y = 1-i \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} (1+i)x + (1-i)y = i \\ (1-i)x + (1+i)y = 1-i \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} (1+i)x + iy = 0 \\ 2x + (1+i)y = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} x - iy = 1 \\ ix + y = i \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} (1+i)x + iy = -1+i \\ (1-3i)x + (2-i)y = 3+2i \end{array}\right.$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} -x + y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x - y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} x + y - z + 2t = 1 \\ -x + y + 2z + 3t = 2 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x - y + z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 7z + 4t = -1 \end{array}\right.$$

Exercice 3. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 4. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x + y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 5y - 5z = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 2 \\ x - 2y + 5z = 1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \\ x + y - 5z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x + y - 4z = 2 \\ -x + y + z = 1 \\ x + 5y - 5z = -1 \end{array}\right.$$

Exercice 5. Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{r} x - y + 2z - 3t = 1 \\ 2x + y - 2z - t = 2 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 2y - z + 2t = 1 \\ x + y + z - t = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + t = 1 \\ x - y + 3z + t = 1 \end{array}\right.$$

Exercice 6. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y+z-t=0 \\ x-4y-z+2t=0 \\ x+14y+5z-8t=0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x+y-z-t=1 \\ x-2y+3z+4t=1 \\ 5x-y+3z+5t=5 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 6x-11y+2z-9t=2 \\ 2x+y-2z-t=1 \\ x-3y+z-2t=-1 \end{array}\right.$$

Exercice 7. Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramétres réels α, β et γ. Autrement dit, trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur α, β et γ pour que les systèmes admettent des solutions, et, lorsque ces conditions sont vérifiées, trouver toutes les solutions en fonction des paramètres.

$$\left\{\begin{array}{r} -x-4y-2z=\alpha \\ x-3y-z=\beta \\ 2x+4y+z=\gamma \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} -x+y+z=\alpha \\ y+3z=\beta \\ x+z=\gamma \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x-y+2z=\alpha \\ 3x-2y+3z=\beta \\ -x+y-z=\gamma \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} x-y+z=\alpha \\ x+2y-z=\beta \\ 4x-y+2z=\gamma \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} x-y+2z=\alpha \\ 3x-y-z=\beta \\ x+y-5z=\gamma \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x+y-4z=\alpha \\ -x+y+z=\beta \\ x+5y-5z=\gamma \end{array}\right.$$

Exercice 8. On rappelle que $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et que $1+j+j^2=0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres $a,b\in\mathbb{C}$ pour que le système suivant d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ admette des solutions, puis le résoudre.

$$\left\{\begin{array}{r} x-y-z=0 \\ x+jy+j^2z=a \\ j^2y+jz=b\ . \end{array}\right.$$

Exercice 9. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres réels α et β, pour que les systèmes suivants admettent des solutions, puis les résoudre en fonction des paramètres.

$$\left\{\begin{array}{r} x+3y+6z=\alpha \\ 3x+y+3z=1 \\ 6x+6y+z=1 \\ 7x+9y+7z=\beta \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 3x-y-2z=\alpha \\ -x+3y-z=\beta \\ -2x-2y+3z=0 \\ x-3y+z=1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x+y+2z=\alpha \\ x+2y+z=\beta \\ x+y+z=1 \\ 4x+3y+4z=0 \end{array}\right.$$

Exercice 10. Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres réels a et b.

$$\left\{\begin{array}{r} ax+y=1 \\ bx+y=2 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} ay+az=ab \\ bz=a \\ x+y+z=1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y=1 \\ bx-z=b-a \end{array}\right.$$

Exercice 11. Résoudre le système suivant en fonction des paramètres réels a et α, β et γ.

$$\left\{\begin{array}{r} x + ay - az = \alpha \\ -ax + y + az = \beta \\ ax - ay + z = \gamma \end{array}\right.$$

Applications

Exercice 12. Problème des boeufs de Newton
Sachant que soixante-quinze bœufs ont brouté en douze jours l'herbe d'un pré de soixante ares et que quatre-vingt-un bœufs ont broutés en quinze jours l'herbe d'un pré de de soixante-douze ares, combien faut-il de bœufs pour brouter en dix-huit jours l'herbe d'un pré de quatre-vingt-seize ares ?
On suppose que, dans les trois prés, l'herbe est à la même hauteur au moment de l'entrée des bœufs et qu'elle continue de croître uniformément après leur entrée. On suppose également que les bœufs broutent à un rythme constant.

Exercice 13. Trouver des réels a, b et c tels que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 - 6x + 5$ s'écrive sous la forme $x \mapsto ax + bx(x-1) + cx(x-1)(x-2)$. Y a-t-il plusieurs choix possibles pour a, b et c ?

Exercice 14. Trouver des réels a, b et c tels que la fonction

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -2\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x(x-1)(x+2)}$$

s'écrive sous la forme

$$x \mapsto \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

En déduire une primitive de f. Y a-t-il plusieurs choix possibles pour a, b et c ? Note : dans un chapitre ultérieur, nous verrons des méthodes plus rapides pour résoudre cet exercice.