Calculs et Mathématiques

Épreuve du 11 janvier 2016

Documents et calculatrices interdits. Durée 3h.

Encadrer les résultats. Le soin sera noté. Le sujet comporte deux pages.

Exercice 1.

1. Rappeler les définitions du cosinus hyperbolique et du sinus hyperbolique.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+i)z^2 - (3+3i)z + (2+4i) = 0.$$

Les solutions seront exprimées sous forme algébrique.

Exercice 3. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x - y + 2z = 3 \\ -5x + y + 3z = -10 \end{cases}$$

Exercice 4.

1. Effectuer la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^5$ par le polynôme $Q(X) = X^3 - 3X - 2$.
2. Déterminer si -1 est une racine du polynôme Q. Si oui, déterminer sa multiplicité.
3. Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme Q.
4. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$\frac{2X^2+9X+6}{X^3-3X-2} = \frac{a}{(X+1)^2} + \frac{b}{(X+1)} + \frac{c}{(X-2)}.$$
5. En déduire les primitives sur $]2,+\infty[$ de $f : x \mapsto \dfrac{x^5}{x^3-3x-2}$.

Exercice 5. Calculer les primitives suivantes à l'aide du changement de variable proposé :

1. $\displaystyle\int \frac{\sin(x)dx}{\sqrt{1+\cos^2(x)}}$, en posant $u = \cos(x)$.
2. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+5}$, en posant $u = e^x$;

Exercice 6. Déterminer suivant le paramètre $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble des solutions du système $(\mathcal{S}_a)$ suivant :

$$(\mathcal{S}_a) \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ x - 8z = a \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
2. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos(2x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
3. $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \cos^2(x)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ : \quad (1+x)y''(x) - 2y'(x) + (1-x)y(x) = (1+x)^3 e^x, \quad x \in]-1, +\infty[$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivante

$$(E') \ : \quad (1+x)y'(x) + 2xy(x) = (1+x)^3, \quad x \in]-1, +\infty[$$

2. Soit y une solution de (E) et z définie par $y(x) = z(x)e^x$. Montrer y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle à déterminer.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 9.
L'objectif de ce problème est de calculer les intégrales $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^k)^n}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Partie I : calcul de certaines valeurs particulières

1. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $I_{0,k}$.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $I_{n,1}$.
3. Calculer $I_{1,2}$.
4. Le but de cette question est le calcul de $I_{1,3}$:
   (a) Déterminer des réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait :
   $$\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$
   (b) En déduire que $I_{1,3} = \dfrac{\ln(2)}{3} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Partie II : une relation de récurrence

Soit, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ fixé. On pose $J_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{(1+x^k)^n} dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, établir une relation entre $I_{n,k}$, $J_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$.
6. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
$$J_{n,k} = -\frac{1}{k(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{k(n-1)} I_{n-1,k}.$$
7. En déduire une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
8. En déduire $I_{3,2}$.