TD 3. Angles et géométrie euclidienne

Exercice 1. A étant un point quelconque du diamètre d'un cercle $\mathcal{C}$, B l'extrémité d'un rayon perpendiculaire à ce diamètre, on mène une droite (BA) qui coupe le cercle en P, puis la tangente au point P qui coupe en C le diamètre prolongé. Démontrer que $CA = CP$.

Exercice 2. [Angle inscrit dans le cas limite] Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, $[AB]$ une corde et $\mathcal{T}$ la tangente de A. Alors $(\mathcal{T}, AB) = \frac{1}{2}(OA, OB)$.

Exercice 3. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles sécants en A et B, et $\mathcal{D}_A$ (respectivement $\mathcal{D}_B$) une droite passant par A (resp. B). On note C et E (resp. D et F) l'intersection de $\mathcal{D}_A$ (resp. $\mathcal{D}_B$) avec les deux cercles. Montrer que $(CD)//(EF)$.

Exercice 4. Les bissectrices intérieure et extérieure en A d'un triangle ABC non isocèle en A recoupent le cercle Γ circonscrit à ce triangle respectivement en I et J. Montrer que I et J appartiennent à la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 5. [Miquel] Soit ABC un triangle direct, et P, Q R trois points situés sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles circonscrits à ARQ et BPR. Ils se coupent en R et en un deuxième point T. Montrer que T est sur le cercle circonscrit à PCQ.

Exercice 6. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, $[BC]$ une corde, et $A \in \mathcal{C}$ tels que les arcs AB et AC soient égaux. Soient $[AD]$ et $[AE]$ deux autres cordes d'extrémités A, qui coupent $[BC]$ en F et en G, respectivement. Montrer que $DEFG$ est inscriptible.

Exercice 7. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles se coupant en P et Q, et considérons une droite $\mathcal{D}$ coupant $\mathcal{C}_1$ en A et B, et coupant $\mathcal{C}_2$ en C et D. Montrer que $(PA, PC) = (DQ, BQ)$.

Plus précisément, montrer que les angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{DQB}$ sont égaux si $\mathcal{D}$ coupe le segment $[PQ]$ et que A, C, B et D sont alignés dans cet ordre. Que peut-on dire dans les autres cas ?

Exercice 8. On donne deux segments $[AB]$ et $[CD]$ non parallèles et de longueur différente. On admet qu'il existe une similitude directe ϕ envoyant A sur C et B sur D. Le but de l'exercice est de construire le centre O de cette similitude.

1. Montrer que l'angle de la similitude est $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}$.
2. On note $Q = (AB) \cap (CD)$. Montrer que $AQCO$ est inscriptible.
3. Terminer le raisonnement et construire O.
4. Que faire si les segments sont parallèles ? De même longueur ? Réfléchir à d'autres méthodes pour construire le centre, sans utiliser de cercles.

Exercice 9. [Triangle orthique] Soit ABC un triangle et A', B', C' les pieds des hauteurs. Montrer que les côtés de ABC sont des bissectrices (intérieures ou extérieures) de $A'B'C'$. Préciser le résultat sur le ABC est acutangle.

Exercice 10. [Ptolémée, preuve géométrique du sens direct]

On considère l'énoncé suivant :

Théorème 0.1 (Ptolémée)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, direct. Alors A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

L'objectif de cet exercice est de prouver le sens direct du théorème.

On suppose A, B, C, D cocycliques.

1. Faire une figure au brouillon et montrer que $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ et trois relations similaires sur d'autres angles.
2. Soit K le point de la diagonale $[AC]$ tel que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. Faire une figure et construire K en expliquant (faire la figure de telle sorte que K soit lisible).
3. Montrer que les triangles ABK et DBC sont semblables, de même que ABD et KBC, par des similitudes dont on précisera les centres et les rapports. Note : il suffit pour cela de montrer qu'ils ont mêmes angles. En déduire des relations sur les côtés de ces triangles.
4. Conclure.

Exercice 11. [Trisection]

1. Soit Γ un cercle, O son centre et M un point n'appartenant pas à Γ. Deux sécantes issues de M coupent Γ respectivement en A et B, et en C et D. Démontrer l'égalité :
$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}).$$
2. Soient A et B deux points d'un cercle Γ de centre O et de rayon r. Sur la droite (OA), soit C le point extérieur au cercle tel que la droite (CB) recoupe le cercle en un point M vérifiant $MC = r$. (On ne demande pas de construire ce point, le placer approximativement sur la figure.) Montrer que $\widehat{ACB} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$.[1]

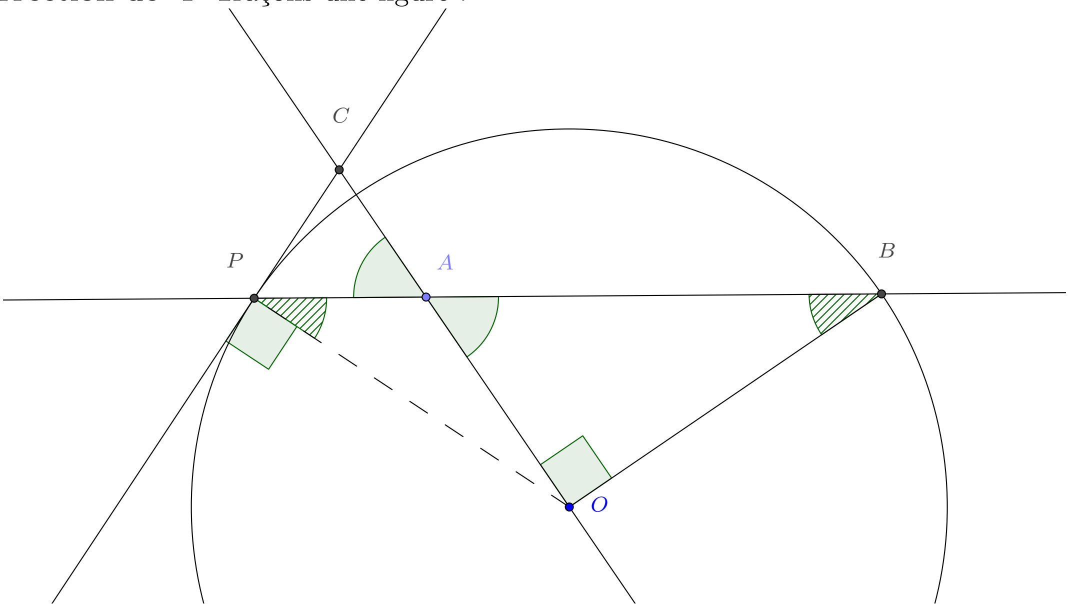
1. Le point C existe par le théorème des valeurs intermédiaires mais n'est pas constructible à la règle et au compas. En fait, il est impossible de trisecter un angle à la règle et au compas, en général, c'est un théorème d'algèbre sur les extensions de corps.

Indications

Indications pour 1 Utiliser la caractérisation des triangles isocèles à l'aide d'angles.
Indications pour 4 Angles inscrits.
Indications pour 5 Condition de cocyclicité.
Indications pour 9 Utiliser les angles droits pour montrer que des points sont cocycliques.
Indications pour 10 Pour la conclusion, utiliser $AC = AK + KC$.
Indications pour 11 Décomposer $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC})$ en $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MC})$.

Corrections

Correction de 1 Traçons une figure :

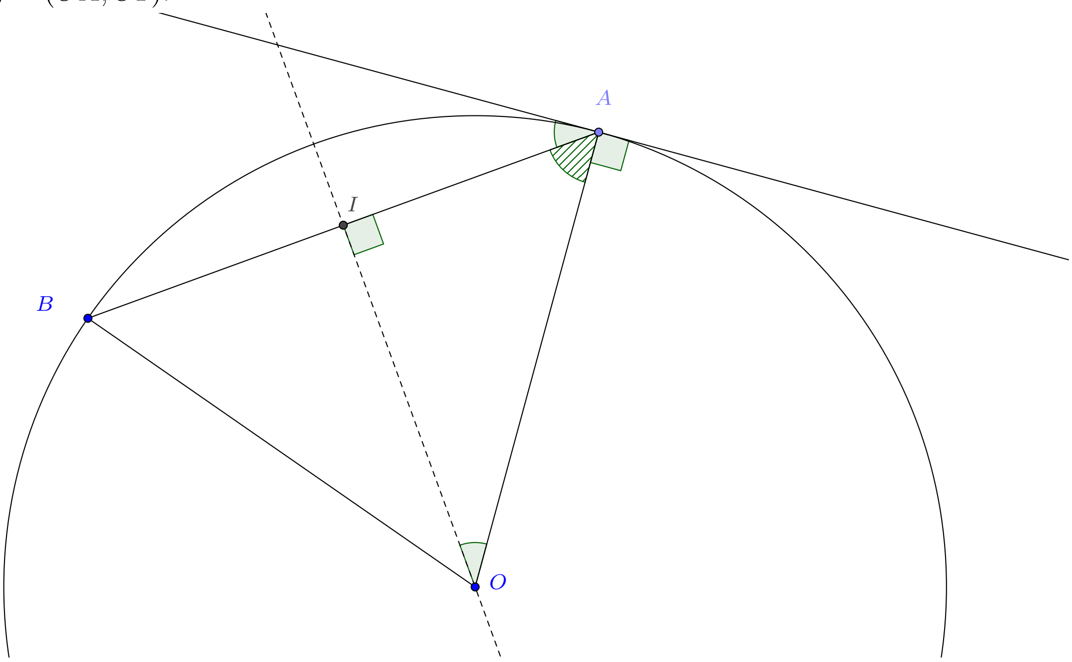


Pour montrer $CA = CP$, on va montrer que le triangle CAP est donc isocèle en C.
On a les égalités d'angles :

$$\begin{aligned}
\widehat{CAP} &= \widehat{OAB} \text{ car les angles sont opposés par le sommet} \\
&= \pi/2 - \widehat{ABO} \\
&= \pi/2 - \widehat{OPB} \text{ car } POB \text{ est isocèle en } O \\
&= \widehat{APC}
\end{aligned}$$

Le triangle CAP est donc isocèle en C, et donc $CA = CP$.

Correction de 2 Traçons la figure, où on a placé I le milieu de $[AB]$, de telle sorte que $\frac{1}{2}(OA, OB) = (OA, OI)$.



Les angles $(AO, \mathcal{T})$ et (AI, IO) sont droits. On a d'une part :

$$0 = (\mathcal{T}, \mathcal{T}) = (\mathcal{T}, AI) + (AI, AO) + \pi/2,$$

et d'autre part, dans le triangle AIO :

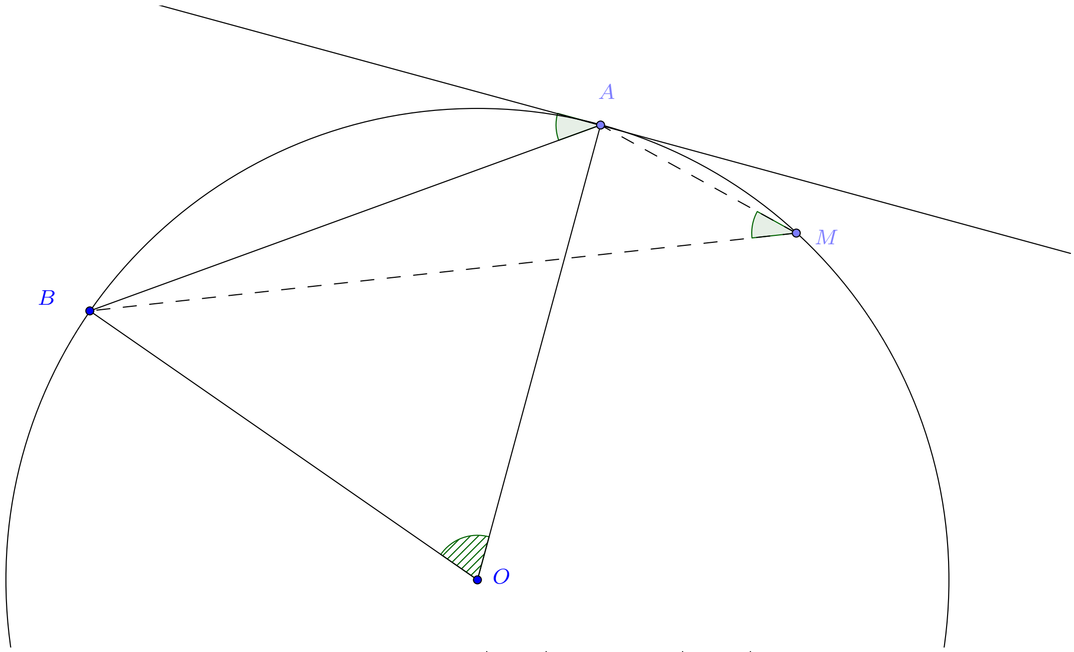
$$0 = (AI, AO) + (IO, IA) + (OA, OI) = (AI, AO) + \pi/2 + (OA, OI).$$

Finalement, on a donc :

$$(\mathcal{T}, AB) = (\mathcal{T}, AI) = -(AI, AO) - \pi/2 = (OA, OI) = \frac{1}{2}(OA, OB),$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Donnons une deuxième idée de preuve. Traçons une figure, en ajoutant un point M sur le cercle.

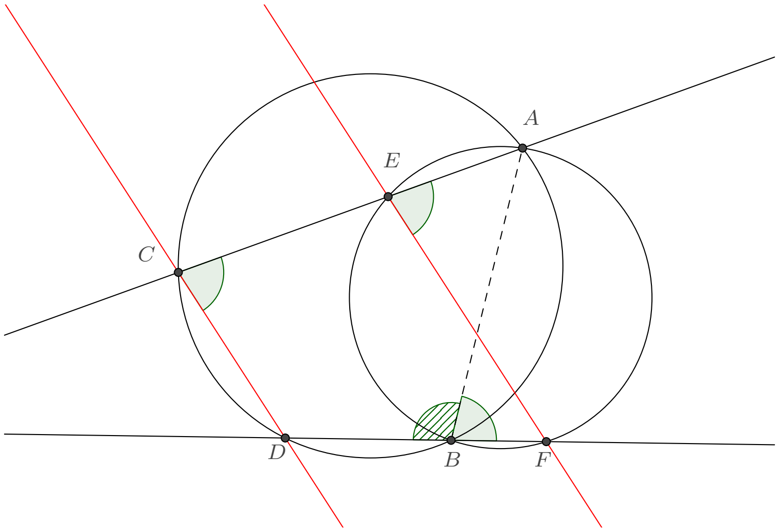


Alors, par le cours, on a l'égalité d'angles orientés $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et l'égalité d'angles de droites $(MA, MB) = \frac{1}{2}(OA, OB)$.

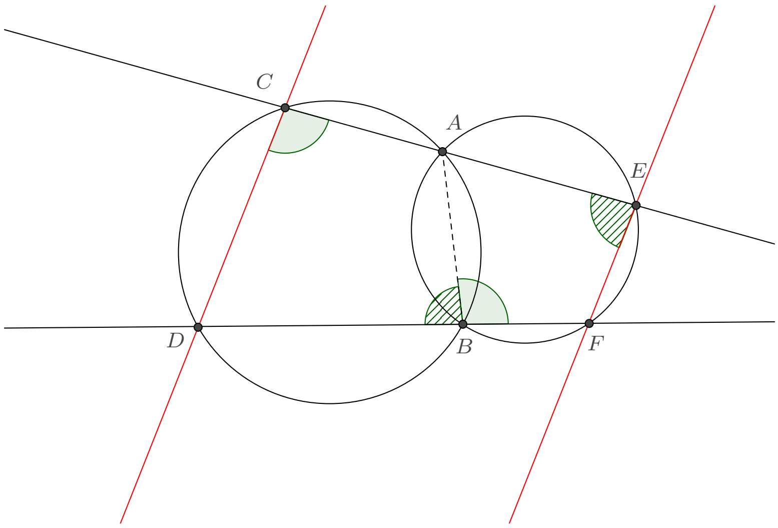
Cet angle de droites est le même pour tout point $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$. Or, lorsque M tend vers A : 1) la droite (MA) tend vers la tangente $\mathcal{T}$ en A ; 2) la droite (MB) tend vers la droite (AB). Comme l'angle de l'angle de deux droites est continu en les deux droites, on en déduit que $(\mathcal{T}, AB) = \frac{1}{2}(OA, OB)$.

Attention : au niveau L2, cette preuve n'est pas acceptée car les notions précises sur lesquelles elle repose n'ont pas encore été vues en cours : les phrases soulignées ne sont pas des assertions mathématiques tant que leur sens n'a pas été défini.

Correction de 3 Traçons une figure. *On marque dès à présent quelques égalités d'angles obtenues par le théorème de l'angle inscrit :*



Les égalités d'angles repérées sur la figure permettent de voir la solution, au moins dans la configuration particulière dessinée. On voit en effet que les angles $\widehat{ECD}$ et $\widehat{AEF}$ sont égaux. Attention toutefois, les angles géométriques sont trompeurs et les égalités que l'on voit sur une figure peuvent dépendre de la façon de tracer la figure. Sur la figure ci-dessous par exemple, les angles en question ne sont pas égaux mais supplémentaires.



Il ne reste plus qu'à rédiger rigoureusement la solution avec des angles de droites, en s'appuyant sur l'intuition donnée par la figure.

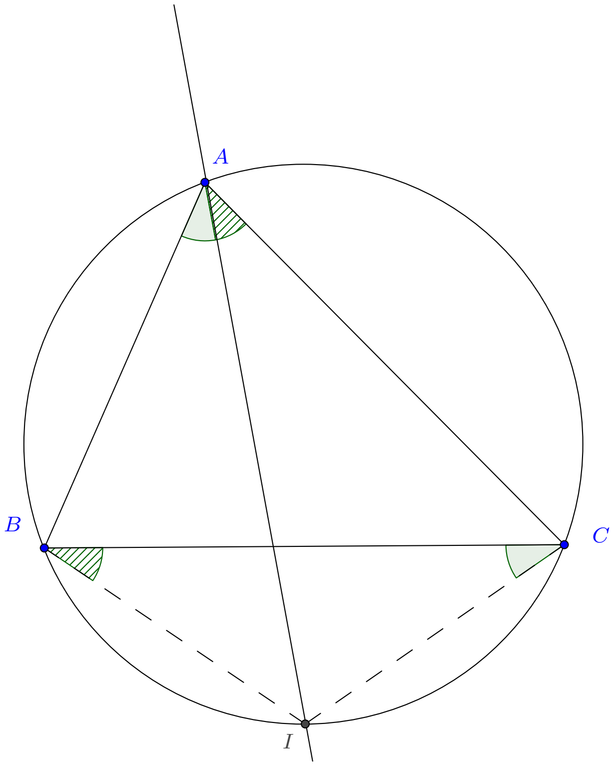
Pour montrer que (CD) et (EF) sont parallèles, il suffit par exemple de montrer qu'elles forment le même angle avec la droite (CA). Or on a la suite d'égalités d'angles de droites :

$$\begin{aligned}(CD, CA) &= (BD, BA) \text{ car } CDAB \text{ est inscriptible}\\ &= (BF, BA) \text{ car } (BD) = (BF)\\ &= (EF, EA) \text{ car } BFAE \text{ est inscriptible}\\ &= (EF, CA) \text{ car } (EA) = (CA).\end{aligned}$$

Correction de 4

Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que IBC et JBC sont isocèles en I et J. On peut prouver les deux résultats de façon indépendante, pour avoir des figures plus simples.

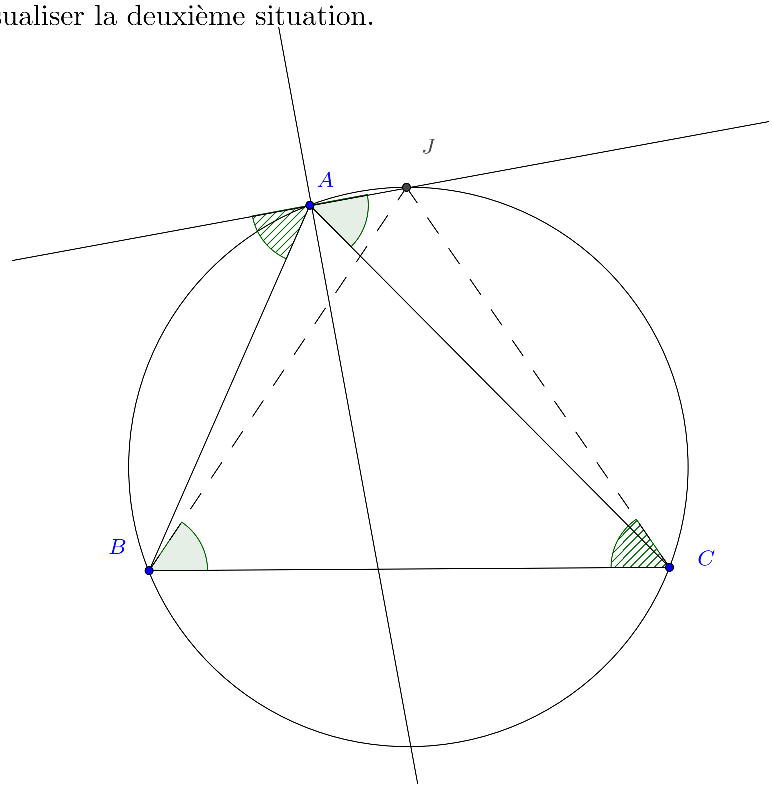
On commence par prouver le résultat pour I :



Pour montrer que BCI est isocèle en I, il suffit de montrer que $(BC, BI) = (CI, CB)$. Or, on a

$$\begin{aligned}
(BC, BI) &= (AC, AI) \text{ car } ABIC \text{ est inscriptible} \\
&= (AI, AB) \text{ car } (AI) \text{ est une bissectrice de } (AC) \text{ et } (AB) \\
&= (CI, CB) \text{ car } ABIC \text{ est inscriptible.}
\end{aligned}$$

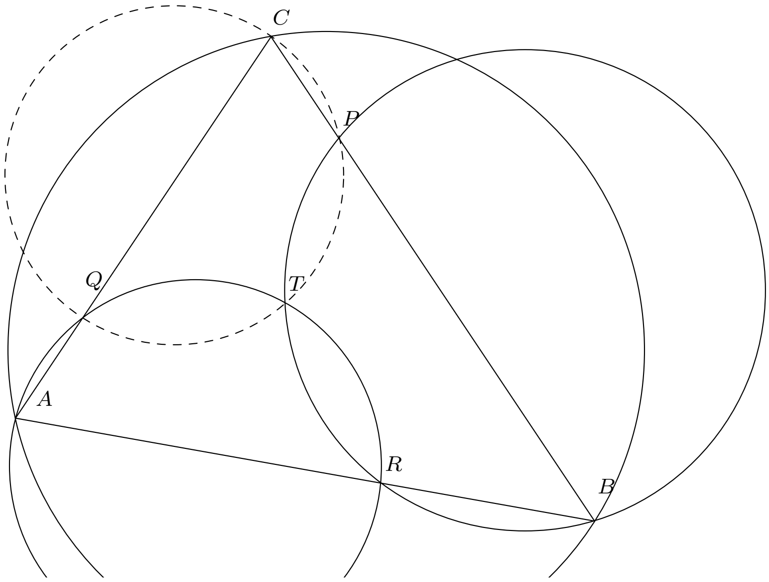
On remarque que l'on n'a pas eu besoin de préciser si la bissectrice était intérieure ou extérieure, ce qui implique que la preuve sera la même pour J. Traçons juste une figure pour visualiser la deuxième situation.



La rédaction de la preuve avec les angles orientés de droites est exactement la même que la précédente en remplaçant I par J.

Si on rédige avec des angles orientés de vecteurs et non de droites, on doit faire attention aux éventuels facteurs π qui apparaissent suivant si on considère la bissectrice intérieure ou extérieure d'un couple de vecteurs. (Ceci est à mettre en relation avec la remarque suivante : l'argument de $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ n'est pas forcément $(\theta + \theta')/2$, ça peut être $\pi + (\theta + \theta')/2$.)

Correction de 5



Il suffit de montrer que T, P, C, Q sont cocycliques. Voici plusieurs rédactions possibles.

Rédaction avec des angles non orientés :

Il suffit par le cours de montrer que les angles $\widehat{TPC}$ et $\widehat{TQC}$ sont supplémentaires. Or par construction, les couples suivants d'angles sont supplémentaire :
$\widehat{TQC}$ et $\widehat{TQA}$ car $Q \in [AC]$,
$\widehat{TQA}$ et $\widehat{TRA}$ car $TQAR$ est inscriptible dans cet ordre,
$\widehat{TRA}$ et $\widehat{TRB}$ car $R \in [AB]$,
$\widehat{TRB}$ et $\widehat{TPB}$ car $TRBP$ est inscriptible dans cet ordre,
$\widehat{TPB}$ et $\widehat{TPC}$ car $P \in [BC]$.
On en déduit immédiatement que $\widehat{TQC} = \widehat{TRA} = \widehat{TPB}$ et $\widehat{TQA} = \widehat{TRB} = \widehat{TPC}$ sont supplémentaires.

Une rédaction avec des angles non orientés est difficile à suivre sans figure : il faut bien justifier la cocyclicité dans un ordre précis pour que les angles inscrits soient supplémentaires et non égaux, et cela peut dépendre de la figure. Il faut donc parfois distinguer artificiellement plusieurs cas. La rédaction qui suit élimine ce problème.

Rédaction avec des angles orientés de vecteurs :

Par le cours, il suffit de montrer l'égalité d'angles $2(\overrightarrow{QT},\overrightarrow{QC}) = 2(\overrightarrow{PT},\overrightarrow{PC})$. Or on a :

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{QT},\overrightarrow{QC}) &= (\overrightarrow{QT},-\overrightarrow{QA}) \text{ car } Q\in[AC]\\
&= \pi + (\overrightarrow{QT},\overrightarrow{QA})\\
&= \pi + (\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RA}) \text{ car } AQTR \text{ est inscriptible}\\
&= \pi + (\overrightarrow{RT},-\overrightarrow{RB}) \text{ car } R\in[AB]\\
&= (\overrightarrow{RT},\overrightarrow{RB})\\
&= (\overrightarrow{PT},\overrightarrow{PB}) \text{ car } PTRB \text{ est inscriptible}\\
&= (\overrightarrow{PT},-\overrightarrow{PC}) \text{ car } P\in[BC].\\
&= \pi + (\overrightarrow{PT},\overrightarrow{PC}).
\end{aligned}$$

On en déduit $2(\overrightarrow{QT},\overrightarrow{QC}) = 2(\overrightarrow{PT},\overrightarrow{PC})$.

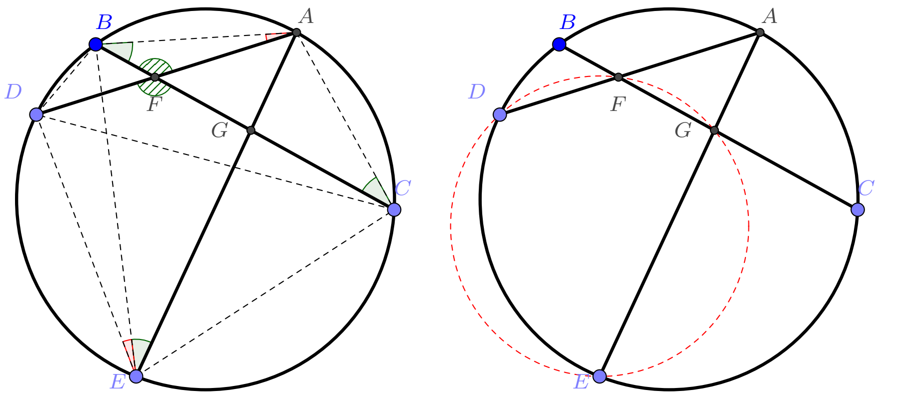
Les angles orientés de vecteurs permettent de ne pas se préoccuper de l'ordre de cocyclicité. Les problèmes de supplémentaires sont pris en charge par le formalisme général et la relation de Chasles. Par contre, la rigueur se paye par une rédaction un peu plus lourde.

Rédaction avec des angles de droites :
Par le cours, il suffit de montrer l'égalité d'angles de droites $(QT,QC) = (PT,PC)$. Or on a :

$$\begin{aligned}
(QT,QC) &= (QT,QA) \text{ car } (QC)=(QA)\\
&= (RT,RA) \text{ car } AQTR \text{ est inscriptible}\\
&= (RT,RB) \text{ car } (RA)=(RB)\\
&= (PT,PB) \text{ car } PTRB \text{ est inscriptible}\\
&= (PT,PC) \text{ car } (PB)=(PC).
\end{aligned}$$

La rédaction avec des angles de droites est sans doute la plus efficace pour ce type d'exercice : elle conserve les avantages des angles orientés de vecteurs (Chasles, calculs faciles à suivre même sans figure), et simplifie la rédaction lorsqu'il y a des angles supplémentaires.

Correction de 6 Traçons une figure :



[Sur la figure, on voit que les angles $\widehat{GFD}$ et $\widehat{GED}$ sont supplémentaires, car $\widehat{GFD} = \widehat{BFA}$ et $\widehat{GED} = \widehat{GEB} + \widehat{BED} = \widehat{FBA} + \widehat{BAF}$. Il ne reste plus qu'à rédiger cette preuve un peu plus rigoureusement avec des angles de droites.]

Montrons que $(FD,FG) = (ED,EG)$, ce qui prouve que $EDFG$ est inscriptible.

Tout d'abord, comme $(FD) = (FA)$ et $(FG) = (FB)$, on a

$$(FD,FG) = (FA,FB).$$

Ensuite, la somme des angles du triangle ABF vaut π, donc en termes d'angles de droites on a la relation $(FA, FB) + (AB, AF) + (BF, BA) = 0$, c'est-à-dire :

$$(FA, FB) = (AF, AB) + (BA, BF).$$

Calculons chacun de ces deux angles. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}(AF, AB) &= (AD, AB) \text{ car } (AD) = (AF)\\ &= (ED, EB) \text{ car } ABDE \text{ est inscriptible.}\end{aligned}$$

Et d'autre part :

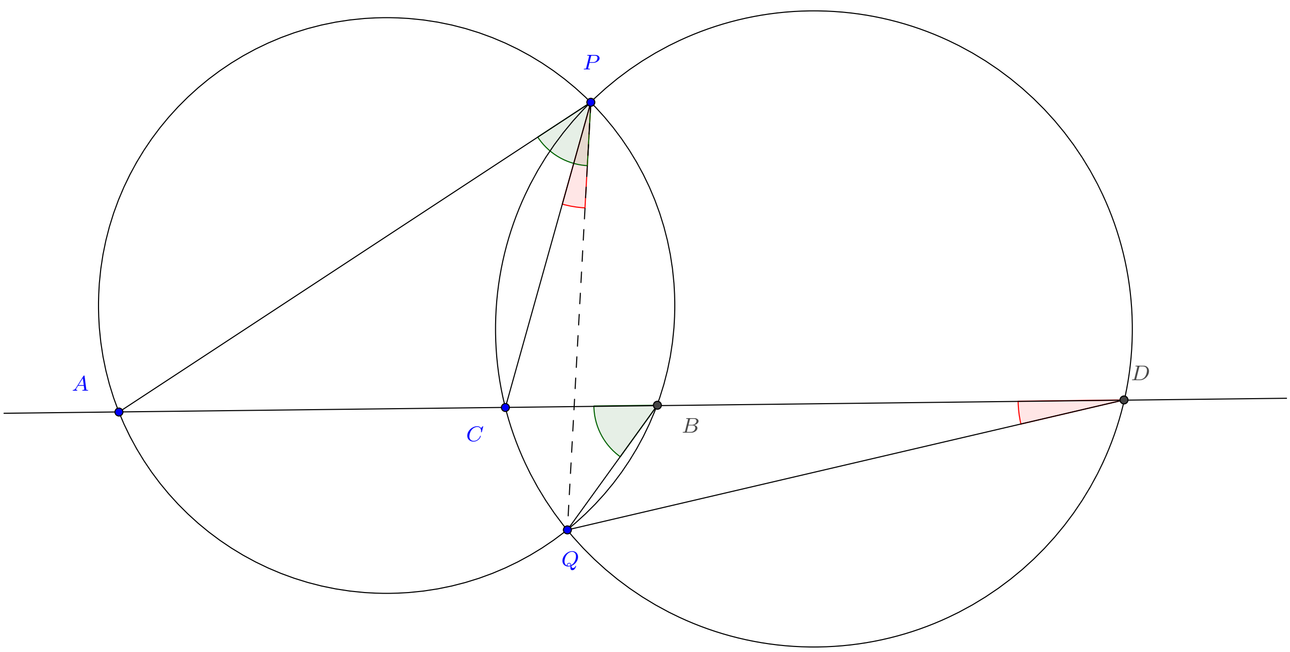
$$\begin{aligned}(BA, BF) &= (BA, BC) \text{ car } (BF) = (BC)\\ &= (CB, CA) \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A\\ &= (EB, EA) \text{ car } ABCE \text{ est inscriptible.}\end{aligned}$$

Finalement, on obtient donc :

$$\begin{aligned}(FD, FG) &= (FA, FB)\\ &= (AF, AB) + (BA, BF)\\ &= (ED, EB) + (EB, EA)\\ &= (ED, EA)\\ &= (ED, EG) \text{ car } (EG) = (EA),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

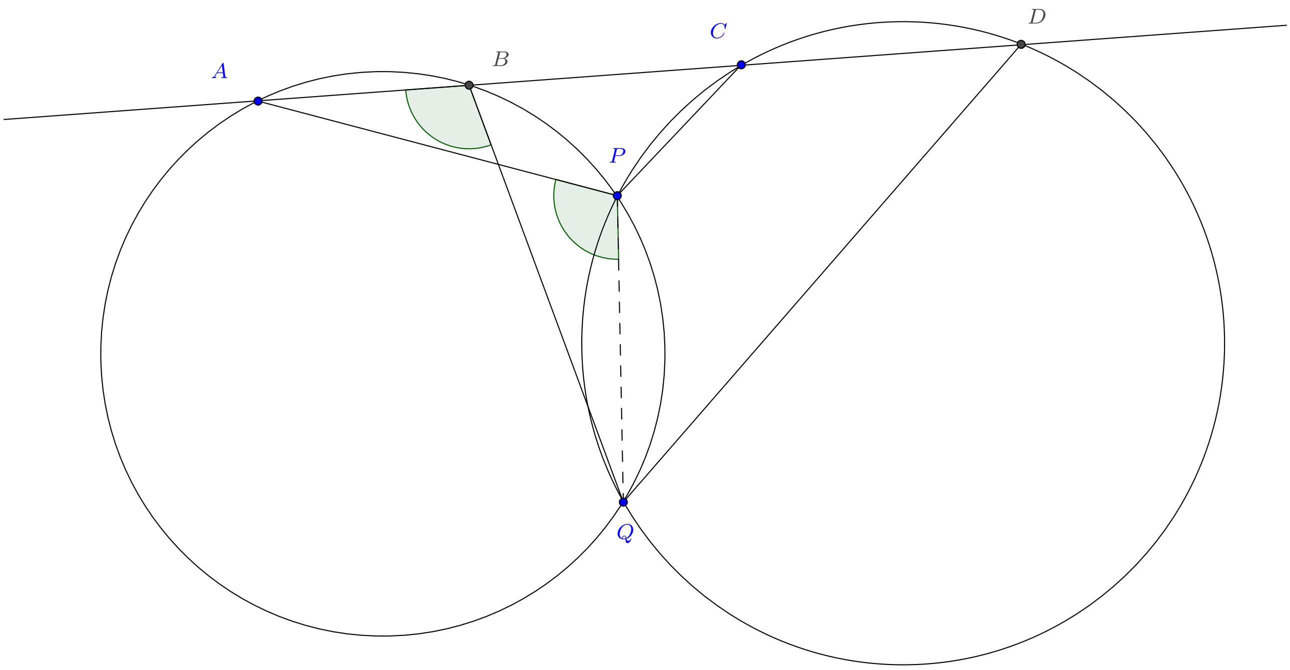
Correction de 7 Traçons une figure. *[Comme d'habitude, le fait de marquer toutes les égalités d'angles disponibles donne le résultat. Sur la figure, on ne marque que celles utilisées dans la rédaction proposée.]*



Montrons que $(PA, PC) = (DQ, BQ)$. On a :

$$\begin{aligned}(PA, PC) &= (PA, PQ) + (PQ, PC)\\ &= (BA, BQ) + (DQ, DC) \text{ par cocyclicité dans chaque cercle}\\ &= (BA, BQ) + (DQ, BA) \text{ car } (DC) = (BA)\\ &= (DQ, BQ).\end{aligned}$$

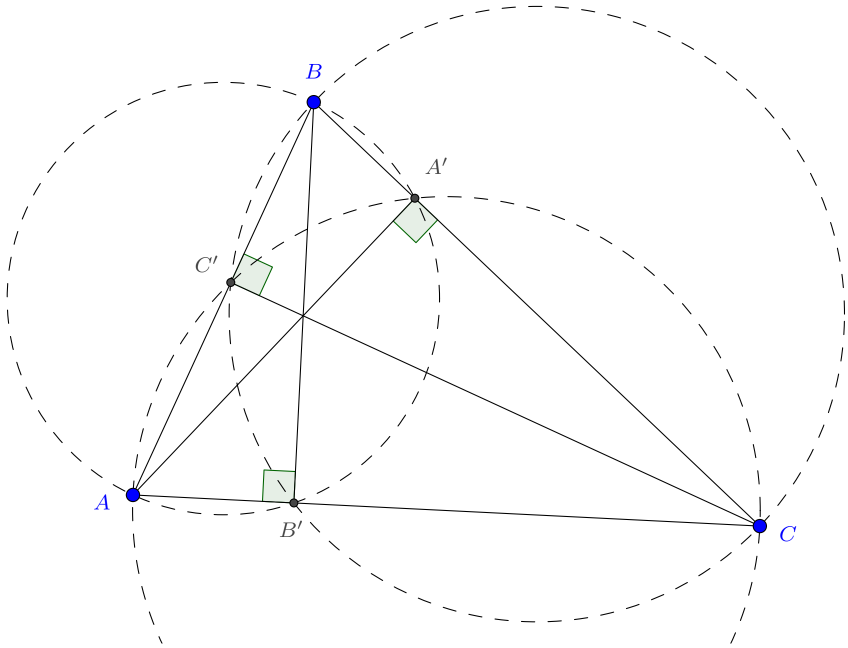
[Voici une autre configuration possible pour la figure, la preuve reste inchangée :]



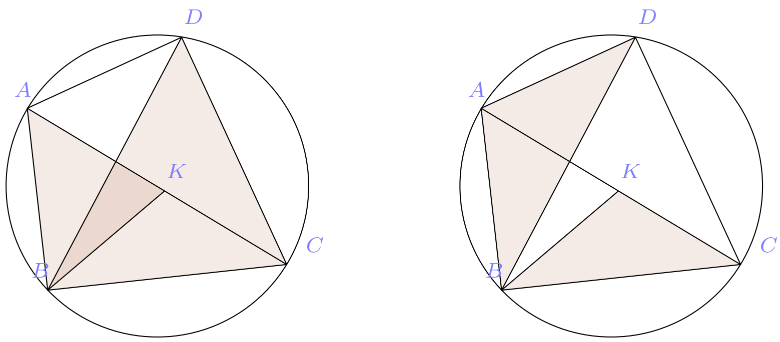
Correction de 8

1. Soit θ l'angle de la similitude. La partie linéaire $\overrightarrow{\phi}$ de ϕ est une similitude vectorielle d'angle θ. On a donc $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\phi}\,\overrightarrow{AB}} = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}$.
2. On a $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}} = (\widehat{\overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{CQ}}$ et d'autre part θ : $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\phi(A)}} = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}$. Donc $AQCO$ est inscriptible.
3. De même $BQDO$ est inscriptible. Donc O appartient à l'intersection des cercles circonscrits à ACQ et BDQ.
4. Si les segments sont parallèles, la similitude est une homothétie. S'ils sont de plus de même longueur, c'est une translation ou une symétrie centrale. Pour d'autres constructions du centre d'une similitude, faire une recherche sur internet, il y en a plusieurs (dont certaines sans cercles).

Correction de 9 (indication) Les côtés du triangle sont les diamètres de trois cercles qui contiennent les pieds des hauteurs.



Correction de 10



Le théorème de l'angle inscrit sur l'arc BC donne l'égalité $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$. La considération des autres arcs CD, DA et AB donne les égalités $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$, $\widehat{DBA} = \widehat{DCA}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Suivons l'énoncé. Soit K le point de la diagonale $[AC]$ tel que $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$.

Alors, ABK et DBC sont semblables (première figure) car leurs angles sont égaux : $\widehat{BAK} = \widehat{BDC}$ et $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$. On a une similitude de rapport

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BC}{BK} = \frac{DC}{AK},$$

envoyant ABK sur DBC.

De même, ABD et KBC sont semblables (deuxième figure) car leurs angles sont égaux : $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \widehat{KCB}$ et $\widehat{ABD} = \widehat{KBC}$. La similitude envoyant ABD sur KBC a pour rapport

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}.$$

On a $AC = AK + KC$, donc $AC \cdot BD = AK \cdot BD + KC \cdot BD$, or, $AK \cdot BD = AB \cdot CD$ (première similitude), et $KC \cdot BD = AD \cdot BC$ (seconde similitude), d'où le résultat :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$