Université de Lorraine | Faculté des sciences et technologies
Licence de mathématiques | 2015-2016

TD $4\frac{1}{2}$. Calculs et révisions

Exercice 1. Soit P un plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$.

1. Donner un vecteur directeur, la pente une équation paramétrique et une équation cartésienne des droites (AB) suivantes :
   (a) $A(2,3)$ et $B(-1,4)$
   (b) $A(-7,-2)$ et $B(-2,-5)$
   (c) $A(3,3)$ et $B(3,6)$
2. Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites passant par A et dirigées par $\vec{v}$ avec :
   (a) $A(2,1)$ et $\vec{v}(-3,-1)$
   (b) $A(0,1)$ et $\vec{v}(1,2)$
   (c) $A(-1,1)$ et $\vec{v}(1,0)$
3. Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites définies comme suit :
   (a) passant par le point $(0,4)$ et de pente 3,
   (b) passant par le point $(2,-3)$ et parallèle à l'axe des x,
   (c) passant par le point $(-2,5)$ et parallèle à la droite $D: 8x+4y=3$.

Exercice 2. On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB): x+2y=3, (AC): x+y=2, (BC): 2x+3y=4$.

1. Donner les coordonnées des points A,B,C.
2. Donner les coordonnées des milieux A',B',C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
3. Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

Exercice 3. On considère les trois points de P : $A(2,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(-2,-5)$.

1. Dessiner le triangle ABC puis calculer son aire.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit Ω et du centre de gravité G de ABC.
3. Vérifier que H, Ω et G sont alignés et qu'en particulier $\overrightarrow{\Omega G}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

Exercice 4.

1. Calculer les angles :
   (a) entre les vecteurs $\vec{u}_1(\sqrt{3},2)$ et $\vec{v}_1(1,3\sqrt{3})$,
   (b) entre les vecteurs $\vec{u}_2(1,\sqrt{2})$ et $\vec{v}_2(\sqrt{2}-2,\sqrt{2}+2)$,
   (c) du triangle de sommets $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.
2. Calculer la distance du point A à la droite D :
   (a) $A(1,1)$ et $D: 2x+y-1=0$
   (b) $A(2,-1)$ et $D: 3x-2y+4=0$
   (c) $A(3,3)$ et $D: -x+3y+2=0$.
3. Trouver les bissectrices de :

(a) $D : 5x - 12y + 7 = 0$ et $D' : 3x + 4y - 7 = 0$,

(b) $D : x - 3y + 5 = 0$ et$D' : 3x - y - 1 = 0$.

Exercice 5. Déterminer le projeté orthogonal du point $M(x_0, y_0)$ sur la droite (D) d'équation $x + 3y - 5 = 0$ ainsi que son symétrique orthogonal.

Exercice 6. 1. Trouver une équation du plan (P) défini par les éléments suivants.

(a) A, B et C sont des points de (P)

i. $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, 0)$ et $C(0, 1, 0)$.

ii. $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(-1, 2, 4)$.

(b) A est un point de (P), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de (P)

i. $A(1, 2, 1)$, $\vec{u}(4, 0, 3)$ et $\vec{v}(1, 3, -1)$.

ii. $A(1, 0, 2)$, $\vec{u}(2, -1, 3)$ et $\vec{v}(-1, 4, 5)$.

(c) A est un point de (P), D est une droite contenue dans (P)

i. $A(0, 0, 0)$ et $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$

ii. $A(1, 1, 0)$ et $(D) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

(d) D et D' sont des droites contenues dans (P)

i. $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

ii. $(D) : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 2x + y - 3z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

2. Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 3s' - t' \\ y = 3 + 3s' + t' \\ z = 1 - 2s' \end{cases}$$

Exercice 7. On considère la famille de plans $(P_m)_{m\in\mathbb{R}}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2x + (2m - 1)y + mz = 3$$

1. Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :

(a) $A(1, 1, 1) \in P_m$

(b) $\vec{n}(2, -\frac{5}{2}, -1)$ est normal à P_m.

(c) $\vec{v}(1, 1, 1)$ est un vecteur directeur de P_m

2. Montrer qu'il existe un unique point Q appartenant à tous les plans P_m.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $(D) \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases}$ et $(D') \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$. Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

Exercice 9. Angle des plans $x + 2y + 2z = 3$ et $x + y = 0$.

Indications 2. Les médianes sont les droites (AA'), (BB'), (CC').

Correction 1. 1. (a) Un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}$ dont les coordonnées sont $(x_B - x_A, y_B - y_A) = (-3, 1)$. Pour n'importe quel vecteur directeur $\vec{v} = (x_v, y_v)$ la pente est le réel $p = \frac{y_v}{x_v}$. La pente est indépendante du choix du vecteur directeur. On trouve ici $p = -\frac{1}{3}$. Une équation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ passant par $A = (x_A, y_A)$ est donnée par $\begin{cases} x = x_v t + x_A \\ y = y_v t + y_A \end{cases}$. Donc ici pour le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ on trouve l'équation paramétrique $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$

Il y a plusieurs façons d'obtenir une équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Première méthode. On sait que $A = (x_A, y_A)$ appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation $ax_A + by_A + c = 0$, idem avec B. On en déduit le système $\begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \end{cases}$. Les solutions s'obtiennent à une constante multiplicative près, on peut fixer $a = 1$ et on trouve alors $b = 3$ et $c = -11$. L'équation est donc $x+3y-11 = 0$.

(b) On trouve $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (5, -3)$, $p = -\frac{3}{5}$ et $\begin{cases} x = 5t - 7 \\ y = -3t - 2 \end{cases}$

Deuxième méthode. Pour trouver l'équation cartésienne on part de l'équation paramétrique réécrite ainsi $\begin{cases} \frac{x+7}{5} = t \\ -\frac{y+2}{3} = t \end{cases}$ On en déduit $\frac{x+7}{5} = -\frac{y+2}{3}$; d'où l'équation $3x + 5y + 31 = 0$.

(c) On trouve $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, 3)$, la droite est donc verticale (sa pente est infinie) une équation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3t + 6 \end{cases}$. Une équation cartésienne est simplement $(x = 3)$.

2. (a) Equation paramétrique $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = -t + 1 \end{cases}$

Troisième méthode. Pour une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, on sait que $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à la droite et donc $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur (car alors $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$). Réciproquement si $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur alors une équation est de la forme $ax + by + c = 0$ pour une certaine constante c à déterminer.

Ici on nous donne le vecteur directeur $\vec{v} = (-3, -1)$ donc on cherche une équation sous la forme $-x + 3y + c = 0$. Pour trouver c, on utilise que A appartient à la droite donc $-x_A + 3y_A + c = 0$, ce qui conduit à $c = -1$. Ainsi une équation de la droite est $-x + 3y = 1$.

(b) On trouve $2x - y + 1 = 0$.

(c) Droite horizontale d'équation $(y = 1)$.

3. Voici juste les résultats :

(a) $y = 3x + 4$,

(b) $y = -3$,

(c) $8x + 4y = 4$ (les droites parallèles à $8x + 4y = 3$ sont de la forme $8x + 4y = c$).

Correction 2. 1. Le point A est l'intersection des droites (AB) et (AC). Les coordonnées (x, y) de A sont donc solutions du système : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ donné par les équations des deux droites. La seule solution est $(x, y) = (1, 1)$. On a donc $A = (1, 1)$. On fait de même pour obtenir le point $B = (-1, 2)$ et $C = (2, 0)$.

2. Notons A' le milieu de $[BC]$ alors les coordonnées se trouvent par la formule suivante $A' = (\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}) = (\frac{1}{2}, 1)$. De même on trouve $B' = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ et $C' = (0, \frac{3}{2})$.

3. (a) Les médianes ont pour équations : $(AA') : (y = 1)$; $(BB') : (3x + 5y = 7)$; (CC') : $(3x + 4y = 6)$.

   (b) Vérifions que les trois médianes sont concourantes (ce qui est vrai quelque soit le triangle). On calcule d'abord l'intersection $I = (AA') \cap (BB')$, les coordonnées du point I d'intersection vérifient donc le système $\begin{cases} y = 1 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$. On trouve $I = (\frac{2}{3}, 1)$.

   Il ne reste plus qu'à vérifier que I appartient à la droite (CC') d'équation $3x+4y = 6$. En effet $3x_I + 4y_I = 6$ donc $I \in (CC')$.

   Conclusion : les médianes sont concourantes au point $I = (\frac{2}{3}, 1)$.

Correction 5. (D) est une droite de vecteur normal $(1, 3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0 + \lambda.\vec{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0 + \lambda.\vec{n}$ a pour coordonnées $(x_0 + \lambda, y_0 + 3\lambda)$.

$$M_0 + \lambda.\vec{n} \in (D) \Leftrightarrow (x_0 + \lambda) + 3(y_0 + 3\lambda) - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}.$$

$p(M_0)$ a pour coordonnées $(x_0 + \frac{-x_0-3y_0+5}{10}, y_0 + 3\frac{-x_0-3y_0+5}{10})$ ou encore $(\frac{9x_0-3y_0+5}{10}, \frac{-3x_0+y_0+15}{10})$.
Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0) = M_0 + 2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$.
Ses coordonnées sont donc $(x_0 + 2(\frac{9x_0-3y_0+5}{10} - x_0), y0 + 2(\frac{-3x_0+y_0+15}{10} - y_0)$ ou encore $(\frac{4x_0-3y_0+5}{5}, \frac{-3x_0-4y_0+15}{5})$.
(Remarque. Si on n'avait pas déjà $p(M_0)$ on aurait cherché le symétrique sous la forme $M_0+\lambda.\vec{n}$, λ étant entièrement déterminé par la condition : le milieu du segment $[M_0, s(M_0)]$ appartient à (D).)

Correction 6. 1. (a) Une équation d'un plan est $ax+by+cz+d = 0$. Si un point appartient à un plan cela donne une condition linéaire sur a, b, c, d. Si l'on nous donne trois point cela donne un système linéaire de trois équations à trois inconnues (car l'équation est unique à un facteur multplicatif non nul près). On trouve :

   i. $x + y + z - 1 = 0$
   ii. $3x + 3y + z - 7 = 0$

   (b) $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal au plan. Si $\vec{n} = (a, b, c)$ alors une équation du plan est $ax + by + cz + d = 0$. On trouve :

   i. $-9x + 7y + 12z - 17 = 0$
   ii. $17x + 13y - 7z - 3 = 0$

   (c) Trouver deux points B, C de la droite D. Le vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de P. Procédé ensuite comme la question précédente. On obtient :

   i. Par exemple $B = (0, -6, -3)$ et $C = (-1, 0, 2)$ appartiennent à D. On trouve l'équation $4x - y + 2z = 0$.
   ii. Par exemple $B = (0, -1, 1)$ (pout $t = 0$) et $C = (1, 1, -2)$ (pour $t = 1$) appartiennent à D. On trouve l'équation $2x - y - 1 = 0$.

   (d) Trouver un point A de D et deux points B, C de la droite D'. Le vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de P. Puis procédé comme avant.

2. Les plans sont définis paramétriquement par $(P) : (2, 2, 1) + s(1, 2, -1) + t(2, 1, -1)$ donc deux des vecteurs directeurs sont $\vec{u} = (1, 2, -1)$ et $\vec{v} = (2, 1, -1)$. Un vecteur normal à (P) est alors $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-1, -1, -3)$.

   Pour le plan (P') défini par $(1, 3, 1)+s'(3, 3, -2)+t'(-1, 1, 0)$, il a pour vecteurs directeurs $\vec{u'} = (3, 3, -2)$ et $\vec{v'} = (-1, 1, 0)$. Un vecteur normal à (P') est alors $\vec{n'} = \vec{u'} \wedge \vec{v'} = (2, 2, 6)$. Les vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires donc les plans (P) et (P') sont parallèles (ou confondus).

Maintenant le point $A=(2,2,1)$ appartient à (P) (on a fait $s=0$ et $t=0$). Il appartient aussi à (P') (en prenant $s'=0$ et $t'=-1$).

Bilan. (P) et (P') sont parallèles et ont un point commun : ils sont égaux !

Correction 7. 1. (a) Un point A appartient à un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ si et seulement si $ax_A+by_A+cz_A+d=0$. Donc $A(1,1,1)\in P_m$ si et seulement si $m^2+(2m-1)+m=3$. Ce qui équivaut à $m^2+3m-4=0$. Les deux solutions sont $m=1$ et $m=-4$. Donc A appartient aux plans P_1 et P_{-4} et pas aux autres.

(b) Un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}=(a,b,c)$. Donc si $\vec{n}=(2,-\frac{5}{2},-1)$ est un vecteur normal à P_m une équation cartésienne est de la forme $2x-\frac{5}{2}y-z+d=0$. Or une équation de P_m est $m^2x+(2m-1)y+mz-3=0$. Ces deux équations sont égales à un facteur multiplicatif près $\lambda\in\mathbb{R}^*$: $2x-\frac{5}{2}y-z+d=\lambda\big(m^2x+(2m-1)y+mz-3\big)$. On en déduit $2=\lambda m^2$, $-\frac{5}{2}=\lambda(2m-1)$ et $-1=\lambda m$. En divisant la première égalité par la troisième on trouve : $m=-2$. D'où $\lambda=\frac{1}{2}$. La seconde égalité est alors vérifiée.

Le seul plan ayant $\vec{n}$ pour vecteur normal est P_{-2}.

(c) Un vecteur est directeur du plan P si et seulement si le produit scalaire $\vec{v}\cdot\vec{n}=0$. Ici $\vec{n}=(m^2,2m-1,m)$. Donc $\vec{v}=(1,1,1)$ est vecteur directeur si et seulement si $m^2+2m-1+m=0$. Ce qui équivaut à $m^2+3m-1=0$. Les deux plans qui ont pour vecteur directeur $\vec{v}$ sont les plans ayant le paramètre $m=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$.

2. Nous allons prendre 3 plans de la famille (P_m), calculer leur point d'intersection et finalement montrer que ce point appartient aux autres plans.

Prenons trois paramètre “au hasard” $m=0$, $m=1$, $m=-1$. Un point qui appartient à ces trois plans doit vérifier les trois équations :

$$\begin{cases} y=-3 \\ x+y+z=3 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que l'intersection des trois plan P_0, P_1 et P_{-1} est le point $Q=(0,-3,6)$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que ce point appartient à tous les plans P_m : c'est le cas car $m^2\cdot 0+(2m-1)\cdot(-3)+m\cdot 6-3=0$.

Autre méthode. On cherche un point $Q=(x_0,y_0,z_0)$ qui vérifie l'égalité $m^2x_0+(2m-1)y_0+mz_0-3=0$ pour tout m. En considérant que c'est une égalité polynomiale en m (x_0,y_0,z_0 sont fixés) on en déduit que $m^2x_0+(2m-1)y_0+mz_0-3$ est le polynôme nul : $x_0m^2+(2y_0+z_0)m-y_0-3=0$. Ces coefficients sont nuls : $x_0=0$ (le coefficient de m^2), $2y_0+z_0=0$ (le coefficient de m), $-y_0-3=0$ (le terme constant). On trouve bien sûr le même point d'intersection de tous les plans : $Q=(0,-3,6)$.

Correction 8. • Repère de (D).

$$\begin{cases} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+z \\ y=-1-3z \end{cases}.$$

(D) est la droite passant par $A(a,-1,0)$ et dirigée par $u(1,-3,1)$. **• Repère de (D').**

$$\begin{cases} x+2y+z-2b=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+z=2b-x \\ 3y+2z=7-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4b-7+x \\ z=14-6b-3x \end{cases}$$

(D') est la droite passant par $A'(0,4b-7,-6b+14)$ et dirigée par $u'(1,1,-3)$. • Les vecteurs u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') ne sont pas parallèles. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A,u,u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z)\in(P)\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-a & 1 & 1\\ y+1 & -3 & 1\\ z & 1 & -3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 8(x-a)+4(y+1)+4z=0\Leftrightarrow 2x+y+z=2a-1.$$

• Enfin, (D) et (D') sont sécantes si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ sécantes} \Leftrightarrow A'\in(P)\Leftrightarrow(4b-7)+(-6b+14)=2a-1\Leftrightarrow b=-a+4.$$

(D) et (D') sont sécantes si et seulement si $b=-a+4$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $2x+y+z=2a-1$.

Correction 9. Soient (P) le plan d'équation $x+2y+2z=3$ et (P') le plan d'équation $x+y=0$. L'angle entre (P) et (P') est l'angle entre les vecteurs normaux $\overrightarrow{n}(1,2,2)$ et $\overrightarrow{n'}(1,1,0)$:

$$\left(\widehat{\overrightarrow{n},\overrightarrow{n'}}\right)=\arccos\left(\frac{\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}}{\|\overrightarrow{n}\|\|\overrightarrow{n'}\|}\right)=\arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}.$$