TD 4. Utilisation des nombres complexes en géométrie

Exercice 1. [Racines de l'unité] Soit n un entier strictement positif.

1. Rappeler ce que sont les racines n-èmes de l'unité. Les écrire sous forme exponentielle.
2. Écrire sous forme algébrique les racines n-èmes pour $n = 1, 2, 3, 4, 6, 8$ et 12. Faire des figures.
3. Montrer que les points dont les affixes sont les racines n-èmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés dont le centre de gravité est l'origine.
4. Calculer les cosinus et sinus de $\pi/8$ et $\pi/12$ et expliquer brièvement comment en déduire toutes les racines seizièmes et vingt-quatrièmes de l'unité, ou de façon plus générale les racines 2^l-èmes et $3 \cdot 2^l$-èmes de l'unité.

Exercice 2. [Caractérisation des triangles équilatéraux]

On note comme d'habitude j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. Soit ABC un triangle. Montrer les équivalences suivantes :

$$ABC \text{ équilatéral direct} \Leftrightarrow a + jb + j^2c = 0 \Leftrightarrow a - b = -j^2(c - b).$$

$$ABC \text{ équilatéral indirect} \Leftrightarrow a + j^2b + jc = 0.$$

En déduire :

$$ABC \text{ équilatéral} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Exercice 3. Soient A, B, C, D deux à deux distincts, d'affixes a, b, c et d. Montrer que $ABCD$ est un carré direct ssi ($a + c = b + d$ et $a + bi = c + di$).

Exercice 4. Soit ABC un triangle direct. Soit D (resp. E) tel que DBA (resp. ACE) soit direct et isocèle rectangle en D (resp. E). Soit L tel que $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{DB}$.

1. Faire une figure et construire D, E et L.
2. Montrer en utilisant les affixes des points que DLE est isocèle rectangle en E.

Exercice 5. [Autour de $\cos(2\pi/5)$]

1. L'objectif de cette question est de prouver que $\cos(2\pi/5) = (\sqrt{5}-1)/4$. Soit $u = e^{2i\pi/5}$. Sur une figure, placer le point d'affixe u et ses puissances. Montrer que $1+u+u^2+u^3+u^4 = 0$. En notant $a = u + u^4$ et $b = u^2 + u^3$, montrer que $a + b = -1$ et que $ab = -1$, puis trouver a et b. Conclure.
2. En déduire $\sin(2\pi/5)$, puis les sinus et cosinus de $\pi/5$ et $3\pi/5$.

Exercice 6. [Nombre et triangles d'or]

1. Montrer que l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On la note ϕ et on l'appelle le *nombre d'or*. On peut facilement le calculer mais c'est inutile pour la suite.
2. Soient $a < b$ deux réels strictement positifs. Montrer que $\frac{b+a}{b} = \frac{b}{a}$ ssi $\frac{b}{a} = \phi$. Dans ce cas, on dit que a et b *respectent la proportion d'or*, ou (mieux) qu'ils sont en *proportion d'extrême et moyenne raison* (Euclide).
3. Soit ABC un triangle. Montrer que la condition $\widehat{B} = \widehat{C} = 2\widehat{A}$ est équivalente à : ($b = c$ et $\frac{b}{a} = \phi$). On pourra calculer les angles du triangle et utiliser la bissectrice de $\widehat{B}$ et utiliser des triangles semblables. Un triangle vérifiant ces conditions équivalentes est appelé *triangle d'or*.

Exercice 7. [Théorèmes de Thébault et de Van Aubel]

Soit $ABCD$ un quadrilatère direct. On construit quatre carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les centres respectifs de ces carrés sont notés P, Q, R, et S.

1. (Théorème de Thébault) Dans le cas particulier où $ABCD$ est un parallélogramme, montrer que $PQRS$ est un carré, en utilisant les nombres complexes ou pas.
2. Dans le cas général, montrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Démontrer des relations analogues pour les autres carrés.
3. Calculer $\frac{s-q}{r-p}$ et montrer le théorème de Van Aubel : $PQRS$ est un *pseudo-carré*, c'est-à-dire que ses diagonales sont de même longueur et se croisent à angle droit.

Exercice 8. [Point de Vecten]

Soit ABC un triangle direct. On construit trois carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CD]$. Les centres respectifs de ces carrés sont notés P, Q et R. Le but est de montrer que (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes. Le point de concours est appelé *point de Vecten* du triangle.

1. Montrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Démontrer des relations analogues pour les autres carrés.
2. Montrer que ABC et PQR ont même centre de gravité.
3. Montrer que (AQ) et (PR) sont perpendiculaires. Conclure.

Exercice 9. [Théorème de Napoléon] Soit ABC un triangle direct. Soient P, Q, R tels que CBP, ACQ et BAR soient des triangles équilatéraux directs. On note U, V, W les centres de gravité respectifs de ces trois triangles équilatéraux. Montrer que UVW est équilatéral, de même centre de gravité que ABC, en utilisant la caractérisation des triangles équilatéraux.

Exercice 10. [Ptolémée avec les complexes] Soient a, b, c et d quatre nombres complexes deux à deux distincts. Leur birapport, noté $[a, b, c, d]$ est par convention égal au nombre complexe $\dfrac{(a-b)(c-d)}{(c-b)(a-d)}$. On admet le résultat suivant : supposons les points d'affixes a, b, c, d non alignés. Alors ils sont cocycliques dans cet ordre si et seulement si $[a, b, c, d]$ est un réel négatif. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Ptolémée dans sa version suivante :

Théorème 0.1 (Ptolémée)**.** Soient A, B, C, D quatre points du plan non alignés. Alors on a

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

avec égalité si et seulement si A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre.

1. Prouver le théorème si deux des points sont égaux.
2. Dans la suite on suppose les points distincts deux à deux. En utilisant les affixes a, b, c, d des points, prouver l'inégalité. On pourra développer $(b-a)(d-c) + (d-a)(c-b)$.
3. Étudier le cas d'égalité et conclure.

Exercice 11. [Une transformation non affine : inversion complexe]

On considère l'application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$. On identifie $\mathbb{R}^2$, muni des coordonnées x et y, et $\mathbb{C}$ muni de la coordonnée $z = x + iy$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon un, $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $x - y = 0$ et $\mathcal{D}_2$ la droite d'équation $x - y + 1 = 0$.

1. Faire une grande figure (échelle : 3cm).
2. Déterminer et tracer les images de $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}_1$ privée de l'origine, et de $\mathcal{D}_2$.

On pourra travailler avec les équations des droites, ou bien des paramétrages. Si on trouve par hasard ou tâtonnement les images, on prendra soin de bien démontrer le résultat a posteriori.