TD 5. Géométrie dans le plan et l'espace

Exercice 1 (Médianes)**.** On considère dans le plan $\mathcal{P}$ trois points A, B et C.

1. Déterminer dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des équations pour les médianes du triangle ABC.
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 2. Soit $(ABDC)$ un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point sur la diagonale (BD). Soit I le symétrique de C par rapport à M. Soit E la projection de I sur (AB) parallèlement à (AD), et F la projection de I sur (AD) parallèlement à (AB).
Montrer que E, M, F sont alignés. Pour cela, on pourra soit utiliser des coordonnées judicieuses, soit raisonner géométriquement avec des homothéties.

Exercice 4. Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives $y = 2x + 1$, $y = 2x + 7$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^3$, soient $(D) \left\{ \begin{array}{l} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{array} \right.$ et $(D') \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{array} \right.$. Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

Exercice 6.

1. On considère le point $A(-2, 4, 1)$, les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{v}(2, 2, -4)$, $\vec{w}(3, -1, 1)$ et le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On note x', y'et z' les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x, y, z en fonction de x', y', z'.
2. On considère la droite $(D) : \left\{ \begin{array}{l} y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{array} \right.$. Utiliser le changement de repère pour donner une équation de D dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}$ un cube de côté $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Les grandes diagonales du cube sont les segments reliant deux sommets situés de part et d'autre du centre du cube. Préciser le nombre de grandes diagonales.
2. Calculer la longueur des grandes diagonales.
3. Calculer l'angle entre deux grandes diagonales.
4. Soit S un sommet et $[SA]$, $[SB]$ les diagonales de deux faces (adjacentes à S) du cube. Calculer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}})$.

Exercice 8 (Tétraèdre régulier en coordonnées)**.** Soient A, B, C et D les quatre points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$, $(1, -1, -1)$ et $(-1, 1, -1)$.

1. Montrer que les points sont les sommets d'un tétraèdre régulier $\mathcal{T}$.
2. Donner des équations des quatre plans d'appui du tétraèdre, c'est-à-dire les plans contenant les faces.
3. Pour chaque plan d'appui, préciser de quel côté se trouve le tétraèdre et en déduire une description du tétraèdre par quatre inégalités.

Exercice 9. Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

Exercice 10 (Distance entre les côtés d'un tétraèdre)**.** Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a. Chercher la distance entre deux arêtes non coplanaires.

Exercice 11 (Section plane d'un cube)**.** Soit $\mathcal{C}$ le cube de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y+z=0$. On note enfin $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs de coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1/2,-1/2,1)$. Le plan vectoriel euclidien $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Donner les équations dans $\mathcal{R}$ des six plans d'appui du cube. Décrire $\mathcal{C}$ par un système d'inégalités.
2. Donner les équations dans $\underline{\mathcal{R}'}$ des droites intersections des plans d'appui avec $\mathcal{P}$. Décrire $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$ par des inégalités de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$.
3. Dessiner sur papier millimétré l'intersection du cube avec $\mathcal{P}$ (hachurer $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$, échelle : 1cm, on donne $\sqrt{3} \sim 1.73$).

Exercice 12 (Projection d'un octaèdre)**.** On note $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel euclidien qui le dirige, $\mathcal{P}$ le plan d'équation $-4x-7y+4z=1$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel qui le dirige.
Enfin, on note $\mathcal{O} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad |x|+|y|+|z| \leqslant 9\}$. C'est un octaèdre régulier, dont les six sommets ont pour coordonnées $(\pm 9, 0, 0)$, $(0, \pm 9, 0)$ et $(0, 0, \pm 9)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\frac{1}{9}(8,-4,1)$ et $\frac{1}{9}(1,4,8)$ dans la base canonique forment une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
2. Compléter la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On note $\mathcal{B}'$ cette nouvelle base, et $\mathcal{R}'$ le repère $(O, \mathcal{B}')$ de $\mathcal{E}$.
3. Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ des sommets de l'octaèdre.
4. Dessiner sur papier millimétré, en justifiant les calculs, la projection orthogonale de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{P}$ (échelle : 1cm).

Exercice 13 (Caractéristique d'Euler-Poincaré)**.** Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On note S (resp. A, F) le nombre de ses sommets (resp. arêtes, faces). La caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{P}$ est par définition

$$\chi(\mathcal{P}) = S - A + F.$$

On admet le théorème suivant :
Théorème : Si $\mathcal{P}$ est convexe, alors $\chi(\mathcal{P}) = 2$.
Le but de l'exercice est d'utiliser ce théorème pour démontrer des résultats sur les polyèdres convexes.

1. Montrer qu'il n'existe pas de polyèdre convexe dont les faces sont toutes des hexagones (réguliers ou pas).
2. Soit $n \geqslant 3$ un entier et $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones à n côtés (réguliers ou pas). Montrer que $3 \geqslant n \geqslant 5$.
3. Un polyèdre $\mathcal{P}$ est dit *combinatoirement régulier* s'il existe des entiers $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 3$ tels que toutes les faces aient exactement n côtés et que tous les sommets appartiennent à exactement k arêtes. Montrer que les seules possibilités pour n et k sont $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$ et $(5,3)$. Ces configurations correspondent au tétraèdre, à l'octaèdre, à l'icosaèdre, au cube et au dodécaèdre.
4. Montrer qu'un polyèdre convexe dont les faces ont au moins cinq côtés doit avoir au moins douze faces pentagonales.