TD 5. Géométrie dans le plan et l'espace

Exercice 1 (Médianes)**.** On considère dans P trois points A, B et C.

1. Déterminer dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des équations pour les médianes du triangle ABC.
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 2 (*)**.** Soit $(ABDC)$ un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Correction 2. Puisque $(ABDC)$ un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $(1, 1)$.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point sur la diagonale (BD). Soit I le symétrique de C par rapport à M. Soit E la projection de I sur (AB) parallèlement à (AD), et F la projection de I sur (AD) parallèlement à (AB).
Montrer que E, M, F sont alignés. Pour cela, on pourra soit utiliser des coordonnées judicieuses, soit raisonner géométriquement avec des homothéties.

Indications 3. Placer le point M au centre de la figure.

Correction 3. Nous présentons deux preuves, l'une géométrique et l'autre calculatoire.
Preuve géométrique :
Soit σ la symétrie de centre M et h l'homothétie de centre M qui envoie D sur B. On définit l'homothétie $\phi = \sigma \circ h = h \circ \sigma$. Ces trois applications conservent bien sûr le parallélisme.
Par définition de F, la droite (FI) est parallèle à (CD). Son image par σ est donc (CD), car $\sigma(I) = C$. En appliquant ensuite h et en utilisant $h(D) = B$, on voit que l'image de (FI) par ϕ est (AB). En particulier $\phi(F)$ est sur la droite (AB).
D'autre part, $F \in (AD)$ donc (FD) est parallèle à (BC), elle est donc envoyée sur (BC) par h, puis sur la parallèle à (BC) contenant $I = \sigma(C)$ par σ. Or l'intersection de cette droite avec (AB) est par définition E. Donc $\phi(F) = E$, et donc F, E, M, sont alignés.

Preuve calculatoire :
On choisit le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. Dans ce repère, les projections de l'énoncé sont simplement les projections sur les axes du repère et ont des expressions simples.
Alors, la droite les points B, D et C ont pour coordonnées $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$, la droite (BD) a pour équation cartésienne $x + y = 1$ et peut se paramétrer par $\{(t, 1 - t), t \in \mathbb{R}\}$. Le segment $[BD]$ est alors l'ensemble $\{(t, 1 - t), t \in [0, 1]\}$, et donc le point M a pour coordonnées $(t, 1 - t)$ avec un certain $t \in [0, 1]$.
Le symétrique I de C par rapport à M vérifie $\overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{MC}$. En coordonnées, cela donne

$$\begin{pmatrix} x_I - x_M \\ y_I - y_M \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_C - x_M \\ y_C - y_M \end{pmatrix},$$

d'où on déduit que I a pour coordonnées $(2t-1, 1-2t)$. D'après l'énoncé, E et F sont simplement les projections de I sur les axes du repère, leurs coordonnées sont donc $(2t - 1, 0)$ et $(0, 1 - 2t)$.
Il reste à vérifier que les points M, E et F sont bien alignés. Or, le vecteur $\overrightarrow{FE}$ a pour coordonnées $(2t - 1, 2t - 1)$, et le vecteur $\overrightarrow{EM}$ a pour coordonnées $(t - (2t - 1), 1 - t - 0) = (1 - t, 1 - t)$.
Les deux vecteurs sont donc bien colinéaires, donc les trois points sont alignés.

Remarque : dans ce cas, l'utilisation de coordonnées simplifie l'exercice qui n'est pas forcément évident à traiter géométriquement. Cette situation est relativement rare, les calculs étant souvent plus difficiles à mener qu'un raisonnement géométrique.

Exercice 4 (**)**.** Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives $y = 2x+1$, $y = 2x+7$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

Correction 4. Notons (D_1), (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives $y = 2x+1$, $y = 2x+7$ et $y = -\frac{1}{2}x$. Soit $\mathcal{C}$ un cercle.
Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles. Donc, $\mathcal{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre est sur l'ensemble des points à égale distance de (D_1) et (D_2) à savoir la droite d'équation $y = 2x+4$ et son rayon est la moitié de la distance de (D_1) à (D_2), ou encore la moitié de la distance d'un point de (D_1), par exemple $(0,1)$, à (D_2). Cette distance vaut $\frac{|2.0-1+7|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $\mathcal{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre Ω a des coordonnées de la forme $(a, 2a+4)$, $a \in \mathbb{R}$, et son rayon vaut $\frac{3}{\sqrt{5}}$.
Un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ est tangent à (D_3) si et seulement si la distance de Ω à (D_3) est le rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Donc,

$$\mathcal{C} \text{ solution} \Leftrightarrow d(\Omega,(D_3)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a+2(2a+4)|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |5a+8| = 3$$
$$\Leftrightarrow 5a+8 = 3 \text{ ou } 5a+8 = -3 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = -\frac{11}{5}$$

On trouve deux cercles solutions, le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre $\Omega_1(-1,2)$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre $\Omega_2(-\frac{11}{5}, -\frac{2}{5})$ et de rayon $\frac{3}{\sqrt{5}}$

Exercice 5 (**)**.** Dans $\mathbb{R}^3$, soient $(D)\ \begin{cases} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases}$ et $(D')\ \begin{cases} x+2y+z-2b=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases}$.
Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

Correction 5. • Repère de (D)**.**

$$\begin{cases} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a+z \\ y = -1-3z \end{cases}.$$

(D) est la droite passant par $A(a,-1,0)$ et dirigée par $u(1,-3,1)$. • **Repère de** (D')**.**

$$\begin{cases} x+2y+z-2b=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y+z = 2b-x \\ 3y+2z = 7-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4b-7+x \\ z = 14-6b-3x \end{cases}$$

(D') est la droite passant par $A'(0, 4b-7, -6b+14)$ et dirigée par $u'(1,1,-3)$. • Les vecteurs u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') ne sont pas parallèles. • Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A, u, u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-a & 1 & 1 \\ y+1 & -3 & 1 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8(x-a)+4(y+1)+4z = 0 \Leftrightarrow 2x+y+z = 2a-1.$$

• Enfin, (D) et (D') sont sécantes si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ sécantes} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow (4b-7)+(-6b+14) = 2a-1 \Leftrightarrow b = -a+4.$$

(D) et (D') sont sécantes si et seulement si $b = -a + 4$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $2x + y + z = 2a - 1$.

Exercice 6. 1. On considère le point $A(-2,4,1)$, les vecteurs $\vec{u}(1,1,1)$, $\vec{v}(2,2,-4)$, $\vec{w}(3,-1,1)$ et le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On note x', y'et z' les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x, y, z en fonction de x', y', z'.

2. On considère la droite $(D) : \begin{cases} y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Utiliser le changement de repère pour donner une équation de D dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

Correction 6. 1. Notons $\mathcal{R}$ le repère initial $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Dire qu'un point M du plan a pour coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R}$ signifie $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
Si $\mathcal{R}'$ désigne un autre repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ alors le même point M a pour coordonnées (x', y', z') dans $\mathcal{R}'$ signifie $\overrightarrow{AM} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$.
La formule de changement c'est simplement écrire les coordonnées de l'égalité $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$$

Mais on connaît les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où l'égalité de changement de repère :

$$(\mathcal{S}) \qquad \begin{cases} x = -2 + x' + 2y' + 3z' \\ y = 4 + x' + 2y' - z' \\ z = 1 + x' - 4y' + z' \end{cases}$$

2. Dans l'équation de la droite (D) $\begin{cases} y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ dans le repère $\mathcal{R}$ on remplace x, y, z par la formule $(\mathcal{S})$ obtenue à la question précédente.
On obtient :
$$\begin{cases} \big(4 + x' + 2y' - z'\big) - \big(1 + x' - 4y' + z'\big) = 3 \\ \big(-2 + x' + 2y' + 3z'\big) + \big(4 + x' + 2y' - z'\big) = 2 \end{cases}.$$
Ce qui donne une équation de (D) dans le repère $\mathcal{R}'$:

$$\begin{cases} 6y' - 2z' = 0 \\ 2x' + 4y' + 2z' = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} 3y' - z' = 0 \\ x' + 2y' + z' = 0 \end{cases}$$

En particulier en faisant $(x', y', z') = (0,0,0)$ on remarque que cette droite passe par A.

3. Nous avions obtenu l'égalité $(\mathcal{S})$ de changement de repère de $\mathcal{R}'$ vers $\mathcal{R}$ qui s'écrit :

$$\begin{cases} x + 2 = x' + 2y' + 3z' \\ y - 4 = x' + 2y' - z' \\ z - 1 = x' - 4y' + z' \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} X = x' + 2y' + 3z' \\ Y = x' + 2y' - z' \\ Z = x' - 4y' + z' \end{cases}$$

Où l'on a noté $X = x+2$, $Y = y-4$, $Z = z-1$. On inverse le système par la méthode de Gauss pour obtenir après calculs :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{12}\big(X + 7Y + 4Z\big) \\ y' = \frac{1}{12}\big(X + Y - 2Z\big) \\ z' = \frac{1}{12}\big(3X - 3Y\big) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{12}\big(x + 7y + 4z - 30\big) \\ y' = \frac{1}{12}\big(x + y - 2z\big) \\ z' = \frac{1}{12}\big(3x - 3y + 18\big) \end{cases}$$

Avec les matrices cela se fait ainsi : le système $(\mathcal{S})$ devient

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $\mathcal{C}$ un cube de côté $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Les grandes diagonales du cube sont les segments reliant deux sommets situés de part et d'autre du centre du cube. Préciser le nombre de grandes diagonales.
2. Calculer la longueur des grandes diagonales.
3. Calculer l'angle entre deux grandes diagonales.
4. Soit S un sommet et $[SA]$, $[SB]$ les diagonales de deux faces (adjacentes à S) du cube. Calculer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}})$.

Correction 7.

1. Le cube a huit sommets. Chaque sommet est l'extrémité d'une unique grande diagonale (dont l'autre extrémité est le sommet opposé). De plus, à chaque grande diagonale on peut associer deux sommets (ses extrémités). Il y a donc $8/2 = 4$ grandes diagonales. Formulation alternative : on a une application $\psi : \{\text{sommets}\} \to \{\text{grandes diagonales}\}$ qui est surjective, et chaque élément à l'arrivée admet deux préimages.
2. Soit $[AB]$ une diagonale du cube. Plaçons-nous dans un repère orthonormé d'origine A et où B a pour coordonnées (a, a, a). Alors il vient $AB = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.
3. Quitte à changer le repère on peut supposer que les diagonales sont celle d'extrémités $X(0,0,0)$ et $Y(a,a,a)$ et celle d'extrémités $Z(a,0,0)$ et $T(0,a,a)$. On calcule alors l'angle
$$(\widehat{\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{ZT}}) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\langle \overrightarrow{XY}, \overrightarrow{ZT}\rangle}{||\overrightarrow{XY}||.||\overrightarrow{ZT}||}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{\langle (a,a,a), (-a,a,a)\rangle}{3a^2}\right) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{3}\right).$$
4. On a $SA = SB = AB = a\sqrt{2}$, donc le triangle SAB est équilatéral, et donc l'angle est $\frac{\pi}{3}$. On peut également déterminer l'angle par le calcul : la méthode exposée plus haut donne alors $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right)$ qui est bien égal à $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 8 (Tétraèdre régulier en coordonnées)**.** Soient A, B, C et D les quatre points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(1,1,1)$, $(-1,-1,1)$, $(1,-1,-1)$ et $(-1,1,-1)$.

1. Montrer que les points sont les sommets d'un tétraèdre régulier $\mathcal{T}$.

2. Donner des équations des quatre plans d'appui du tétraèdre, c'est-à-dire les plans contenant les faces.
3. Pour chaque plan d'appui, préciser de quel côté se trouve le tétraèdre et en déduire une description du tétraèdre par quatre inégalités.

Correction 8.

1. Dans le cas demandé, il suffit de montrer que toutes les distances entre les points sont égales. Ceci est suffisant pour montrer que les quatre faces sont des triangles équilatéraux et que le polyèdre est un tétraèdre régulier.
   Première méthode. On calcule toutes les distances. Comme il y a quatre points, il y a $\binom{4}{2} = 6$ distances à calculer. On a par exemple $AB = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 0} = \sqrt{8}$. On laisse le lecteur vérifier que les autres distances sont égales.
   Deuxième méthode. On utilise des isométries stabilisant le tétraèdre. Par exemple, un dessin permet de voir que la composée de la symétrie centrale et d'une rotation d'angle $\pi/2$ d'axe Oz stabilise le tétraèdre. Cette isométrie ϕ vérifie $\phi(A) = C$, $\phi(B) = D$, $\phi(C) = B$ et $\phi(D) = A$. Pour prouver les assertions ci-dessus, il suffit d'écrire la matrice de ϕ dans la base canonique :
   $$R_{\pi/2,Oz} \cdot (-I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   et en calculant les coordonnées des images des quatre points.
   De l'existence de cette isométrie on tire :
   $$AB = \phi(A)\phi(B) = CD,\ AC = \phi(A)\phi(C) = CB = \phi(C)\phi(B) = BD = \phi(B)\phi(D) = DA.$$
   Il suffit alors de trouver une autre isométrie qui montre que $AB = AC$, ou simplement de terminer par un unique calcul de distances montrant ce fait.
2. Le plan ABC admet $\vec{n} := \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal. Comme ce vecteur a pour coordonnées
   $$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix},$$
   on en déduit que le plan ABC a pour équation $x - y + z = d$, où $d \in \mathbb{R}$ doit encore être déterminé. Comme A appartient au plan, ses coordonnées doivent vérifier l'équation, d'où on tire $d = 1$. Ainsi, l'équation du plan ABC est :
   $$x - y + z = 1.$$
   Pour les trois autres plans ABD, ACD et BCD on obtient de la même manière les équations $x - y - z = -1$, $x + y - z = 1$ et $x + y + z = -1$.
3. Le plan ABC ayant pour équation $x - y + z = 1$, le tétraèdre se trouve soit dans le demi-espace $x - y + z \leqslant 1$, soit dans le demi-espace $x - y + z \geqslant 1$. Comme D appartient au tétraèdre et que $x_D - y_D + z_D = -1 - 1 - 1 = -3$, on en déduit que le tétraèdre appartient au demi-espace $x - y + z \leqslant 1$. On procède de même pour les trois autres plans d'appui, ce qui donne la caractérisation :
   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z \leqslant 1 \\ x - y - z \geqslant -1 \\ x + y - z \leqslant 1 \\ x + y + z \geqslant -1 \end{cases}$$

Exercice 9 (**I). Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

Correction 9.

Angle entre deux arêtes. Les faces du tétraèdre $ABCD$ sont des triangles équilatéraux et donc l'angle entre deux arêtes est $60°$.

Angle entre une arête et une face. C'est l'angle $\widehat{CDI}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CDI} = \arccos\left(\frac{HD}{DI}\right) = \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7\ldots°.$$

Angle entre deux faces. C'est l'angle $\widehat{CID}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CID} = \pi - 2\widehat{CDI} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70,5\ldots°.$$

Exercice 10 (Distance entre les côtés d'un tétraèdre)**.** Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier de côté a. Chercher la distance entre deux droites contenant des arêtes non coplanaires.

Correction 10. Il y a plusieurs façons de faire.
Première méthode. On peut prendre un modèle du tétraèdre en coordonnées et calculer. Considérons par exemple le tétraèdre dont les sommets ont pour coordonnées $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (1,0,1)$ et $D = (0,1,1)$. C'est un tétraèdre régulier, dont les arêtes ont longueur $\sqrt{2}$.
On peut alors calculer la distance entre deux droites contenant des arêtes non coplanaires, par exemple les droites (AB) et (CD). Ces droites peuvent s'écrire : $(AB) = A + \mathbb{R}\overrightarrow{AB}$ et $(CD) = C + \mathbb{R}\overrightarrow{CD}$ et admettent donc les paramétrages suivants :

$$(AB) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ et } (CD) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

La distance entre les deux droites est données par la formule :

$$dist((AB),(CD)) = \frac{|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC})|}{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}||},$$

qu'il faut interpréter comme le fait que le volume d'un parallélépipède est égal à sa base multipliée par sa hauteur. Or la quantité $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC})|$ est la volume du parallélépipède porté engendré par les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$, et $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}||$ est l'aire du parallélogramme engendré par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
Finalement, on obtient une distance de $\frac{2}{2} = 1$. Ceci pouvait se voir immédiatement sur une figure.
On en déduit que pour un tétraèdre régulier dont les arêtes ont longueur a, la distance entre deux arêtes non coplanaires est $a/\sqrt{2}$.

Seconde méthode. On coupe le tétraèdre par un plan contenant une arête et coupant l'arête opposée en son milieu.
Le triangle obtenu a pour côtés a, $a\sqrt{3}/2$ et $a\sqrt{3}/2$. Il est isocèle. La distance recherchée est celle de la hauteur issue du sommet. Par le théorème de Pythagore, on a $h^2 + a^2/4 = 3a^2/4$, d'où $h = a/\sqrt{2}$.

Exercice 11 (Section plane d'un cube)**.** Soit $\mathcal{C}$ le cube de $\mathbb{R}^3$ dont les sommets ont pour coordonnées $(\pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 0$. On note enfin $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs de coordonnées $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$ et $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1/2, -1/2, 1)$. Le plan vectoriel euclidien $\mathcal{P}$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1. Donner les équations dans $\mathcal{R}$ des six plans d'appui du cube. Décrire $\mathcal{C}$ par un système d'inégalités.
2. Donner les équations <u>dans $\mathcal{R}'$</u> des droites intersections des plans d'appui avec $\mathcal{P}$. Décrire $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$ par des inégalités de coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$.
3. Dessiner sur papier millimétré l'intersection du cube avec $\mathcal{P}$ (hachurer $\mathcal{P} \cap \mathcal{C}$, échelle : 1cm, on donne $\sqrt{3} \sim 1.73$).

Correction 11.

1. Les six plans d'appuis ont pour équations $x = \pm 2\sqrt{2}$, $y = \pm 2\sqrt{2}$ et $z = \pm 2\sqrt{2}$. Le cube est décrit par les inéquations :

$$\begin{cases} -2\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leqslant z \leqslant 2\sqrt{2} \end{cases} .$$

2. Soit $M \in \mathcal{P}$, de coordonnées (a, b) dans $\mathcal{R}'$ (Autrement dit, $\overrightarrow{OM} = a.u + b.v$). Alors M a pour coordonnées dans $\mathcal{R}$:

$$\left(\frac{-a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right).$$

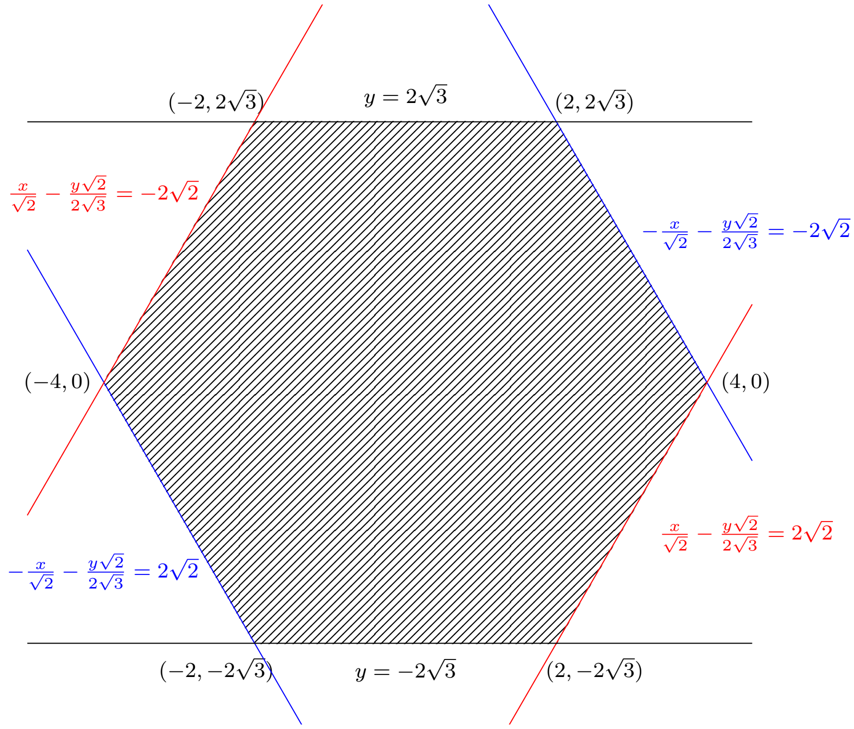
Les intersections des six plans d'appui avec $\mathcal{P}$ ont donc pour équations dans $\mathcal{R}_{\mathcal{P}}$:

$$\frac{-a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{2}, \ \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{2}, \ \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Par conséquent, l'intersection $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}$ est décrite par le système d'inéquations :

$$\begin{cases} -2\sqrt{2} \leqslant \frac{-a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \leqslant 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \leqslant 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \leqslant \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \leqslant 2\sqrt{2} \end{cases} .$$

3. On obtient l'hexagone régulier suivant.

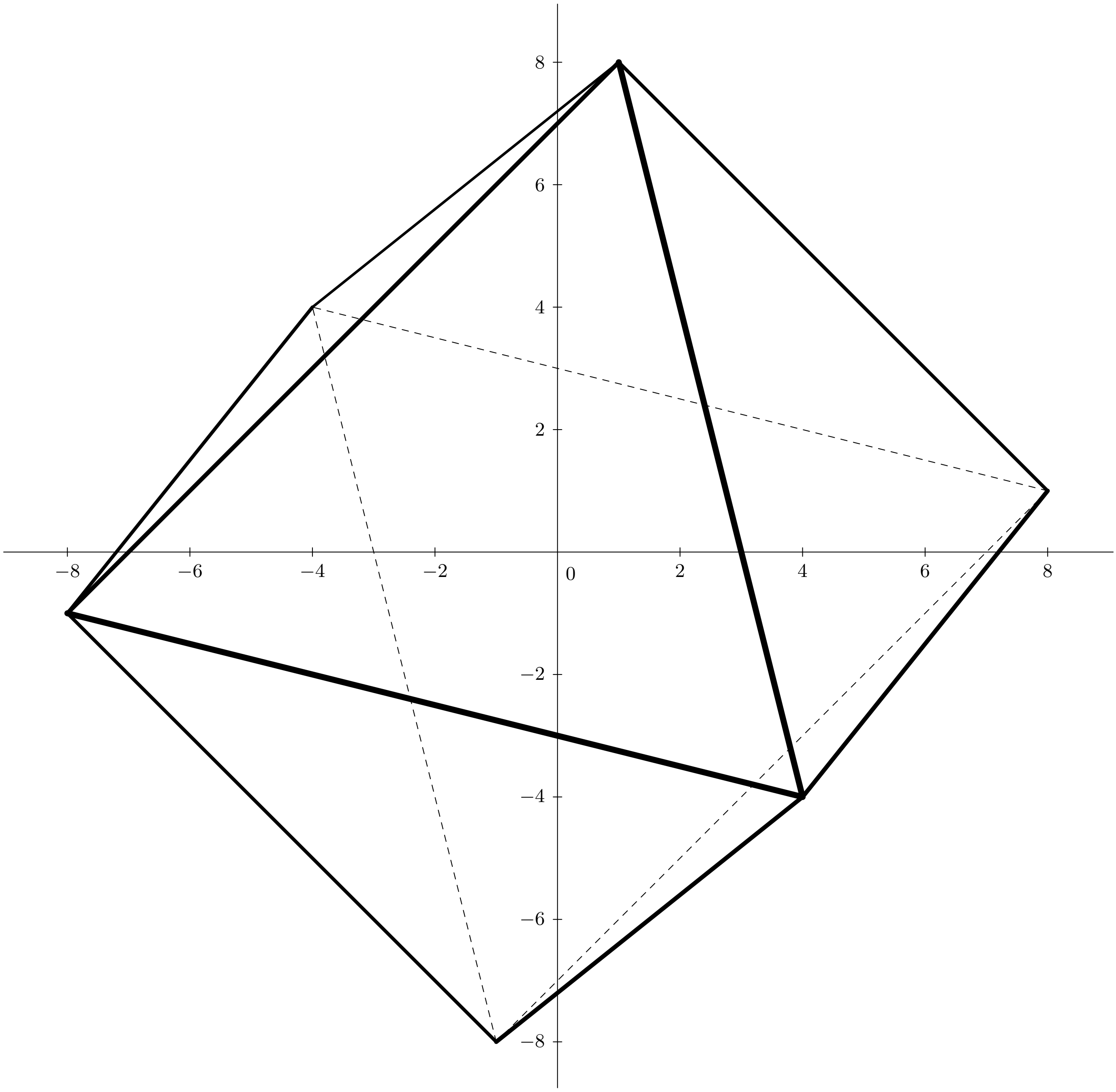


Exercice 12 (Projection d'un octaèdre)**.** On note $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure canonique d'espace affine euclidien et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'espace vectoriel euclidien qui le dirige, $\mathcal{P}$ le plan d'équation $-4x - 7y + 4z = 1$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel qui le dirige.
Enfin, on note $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad |x| + |y| + |z| \leqslant 9\}$. C'est un octaèdre régulier, dont les six sommets ont pour coordonnées $(\pm 9, 0, 0)$, $(0, \pm 9, 0)$ et $(0, 0, \pm 9)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées $\frac{1}{9}(8, -4, 1)$ et $\frac{1}{9}(1, 4, 8)$ dans la base canonique forment une base orthonormée de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.
2. Compléter la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en une base orthonormée directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. On note $\mathcal{B}'$ cette nouvelle base, et $\mathcal{R}'$ le repère $(O, \mathcal{B}')$ de $\mathcal{E}$.
3. Donner les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ des sommets de l'octaèdre.
4. Dessiner sur papier millimétré, en justifiant les calculs, la projection orthogonale de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{P}$ (échelle : 1cm).

Correction 12.

1. Les vecteurs donnés sont de norme 1 et orthogonaux entre eux. Leur produit vectoriel est égal au vecteur $\frac{1}{9}(-4, -7, 4)$, qui est un vecteur normal au plan donné. Ils forment donc bien une base orthonormée du plan $\mathcal{P}$.
2. On complète la base en rajoutant $\vec{w} := \vec{u} \wedge \vec{v}$. La matrice de passage vers la nouvelle base est celle dont les colonnes contiennent les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base canonique : $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. Pour obtenir les coordonnées des sommets de l'octaèdre dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$, il suffit de multiplier leurs coordonnées par M^{-1}, qui puisque la matrice est orthogonale, est égale à ${}^tM$. Les coordonnées de leurs projections dans le plan $\mathcal{P}$ et dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$ s'obtiennent en oubliant la troisième composante de ces nouvelles coordonnées. On peut alors faire une figure :



Exercice 13 (Caractéristique d'Euler-Poincaré)**.** Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On note S (resp. A, F) le nombre de ses sommets (resp. arêtes, faces). La caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{P}$ est par définition

$$\chi(\mathcal{P}) = S - A + F.$$

On admet le théorème suivant :
Théorème : Si $\mathcal{P}$ est convexe, alors $\chi(\mathcal{P}) = 2$.
Le but de l'exercice est d'utiliser ce théorème pour démontrer des résultats sur les polyèdres convexes.

1. Montrer qu'il n'existe pas de polyèdre convexe dont les faces sont toutes des hexagones (réguliers ou pas).
2. Soit $n \geqslant 3$ un entier et $\mathcal{P}$ un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones à n côtés (réguliers ou pas). Montrer que $3 \geqslant n \geqslant 5$.

3. Un polyèdre $\mathcal{P}$ est dit *combinatoirement régulier* s'il existe des entiers $n \geqslant 3$ et $d \geqslant 3$ tels que toutes les faces soient des n-gones et que tous les sommets soient de degré d, c'est-à-dire appartiennent à exactement d arêtes. Montrer que les seules possibilités pour n et d sont $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$ et $(5,3)$. Remarque : ces configurations existent vraiment. Elles correspondent au tétraèdre, à l'octaèdre, à l'icosaèdre, au cube et au dodécaèdre.
4. Montrer qu'un polyèdre convexe dont les faces ont au moins cinq côtés doit avoir au moins douze faces pentagonales.

Correction 13. 1. Supposons que toutes les faces soient des hexagones, donc possèdent six côtés (et six sommets).
Chaque arête du polyèdre appartient exactement à deux faces, donc en sommant toutes les arêtes de toutes les faces, on compte deux fois chaque arête :

$$6F = 2A.$$

D'autre part, Un sommet est adjacent à au moins trois faces, sinon le polyèdre est localement plat au voisinage du sommet, comme il est convexe, il est alors forcément inclus dans un plan, mais par hypothèse, le polyèdre ne l'est pas. Donc en sommant tous les sommets de toutes les faces, on compte chaque sommet au moins trois fois :

$$6F \geqslant 3S.$$

En utilisant la formule d'Euler, on en déduit :

$$2 = S - A + F \leqslant 2F - 3F + F = 0,$$

ce qui est absurde. Donc les faces ne peuvent pas être toutes des hexagones.

2. On a bien sûr $n \geqslant 3$, car une face a au moins trois côtés. Pour l'autre inégalité, on suit le même raisonnement que plus haut. En comptant les sommets et les arêtes à partir des faces, on obtient

$$nF = 2A \text{ et } nF \geqslant 3S.$$

La formule d'Euler donne alors

$$2 = S - A + F \leqslant \frac{n}{3}F - \frac{n}{2}F + F = \frac{6-n}{6}F,$$

d'où $n \leqslant 5$.

3. On suit encore le même raisonnement, qui donne

$$nF = 2A..$$

D'autre part, en comptant les arêtes à partir des sommets, on a :

$$dS = 2A$$

La formule d'Euler donne alors :

$$2 = S - A + F = \frac{2}{d}A - A + \frac{2}{n}A$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{n}.$$

On sait que n et d sont $\geqslant 3$. D'autre part, ils ne peuvent pas être tous les deux > 3 car dans ce cas $\frac{1}{d} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{2}$. Donc un des deux doit être égal à 3.
Si $n = 3$, on a l'équation $\frac{1}{A} + \frac{1}{6} = \frac{1}{d}$. On voit alors que d doit valoir 3, 4 ou 5 et on trouve également les valeurs pour A.
Si $d = 3$, un raisonnement similaire montre que n doit être égal à 3, 4 ou 5.