Compléments : angles orientés de droites

On désire définir une notion d'angle (orienté) entre deux droites, qui soit plus flexible que celle d'angle orienté entre vecteurs.

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites quelconques, l'angle orienté entre ces droites sera noté :

$$(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$$

1 Analyse

Avant même de le définir, et même de définir son type, c'est-à-dire l'ensemble auquel appartient un tel élément, établissons un cahier des charges. Les angles de droites devront être des éléments d'un certain groupe commutatif dont la loi sera notée $+$ et l'élément neutre 0, et ils devront vérifier :

1. Pour toute droite $\mathcal{D}''$ parallèle à $\mathcal{D}$ (y compris $\mathcal{D}$ elle-même), $(\mathcal{D}, \mathcal{D}'') = 0$.
2. La relation de Chasles : pour toute droite $\mathcal{D}''$, $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = (\mathcal{D}, \mathcal{D}'') + (\mathcal{D}'', \mathcal{D}')$.

Ces deux propriétés entraînent les suivantes :

1. $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = -(\mathcal{D}', \mathcal{D})$.
2. Pour toute droite $\mathcal{D}''$ parallèle à $\mathcal{D}'$, on doit avoir $(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = (\mathcal{D}, \mathcal{D}'')$.
3. Si A, B et C sont trois points distincts, on a la relation :

$$(AB, AC) + (CA, CB) + (BC, BA) = 0.$$

Démonstration. Les deux premières propriétés sont immédiates en utilisant la relation de Chasles, et elles ressemblent comme deux gouttes d'eau à celles démontrées en cours pour les angles entre vecteurs. Pour la dernière, il ne s'agit pas d'une erreur, c'est bien zéro. On la prouve comme suit :

$$\begin{aligned}
0 &= (AB, AB) \\
&= (AB, AC) + (AC, BC) + (BC, AB) \text{ en utilisant deux fois Chasles} \\
&= (AB, AC) + (CA, CB) + (BC, BA) \\
&\quad \text{vu les égalités de droites } (AC) = (CA),\ (BC) = (CB) \text{ et } (AB) = (BA)
\end{aligned}$$

□

2 Construction

Il nous reste encore à définir la notion. Étant données deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on peut choisir un vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u}$ pour la première droite et $\overrightarrow{v}$ pour la deuxième droite et considérer l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$. Cependant, il y a en fait deux choix pour $\overrightarrow{u}$, à savoir $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$. De même, il y a deux choix opposés possibles pour $\overrightarrow{v}$. À première vue, ceci produit quatre angles $(\widehat{\pm\overrightarrow{u}, \pm\overrightarrow{v}})$. Cependant, comme $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}})$ et $(\widehat{-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}})$, il n'y a en fait que deux choix d'angles :

$$\alpha = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \text{ et } \beta = (\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}).$$

Ces deux angles α et β sont différents, mais par construction ils vérifient forcément

$$\alpha - \beta = \pi.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) - (\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) + (\widehat{-\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}}) \\ &= (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) + (\widehat{\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{u}}) = (\widehat{\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}}) = \pi.\end{aligned}$$

Conclusion : à deux droites on peut associer une paire d'angles α et β qui sont congrus modulo π. On comprend alors que ce qui nous intéresse est précisément cette classe de congruence modulo π, ce qui motive la :

Définition 2.1. L'angle entre deux droites est la classe modulo π de l'angle entre des vecteurs directeurs de ces droites (qui est toujours la même pour tout choix de vecteurs directeurs).

Un angle orienté de droites est donc un élément de $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Un angle entre droites et un angle entre vecteurs sont des objets de type différents, et ne peuvent donc pas être comparés, puisqu'ils n'appartiennent même pas au même ensemble.

3 Synthèse

Il reste à vérifier que cette définition vérifie les propriétés énumérées dans le cahier des charges. C'est un exercice, il suffit de choisir des vecteurs directeurs et d'utiliser le cours sur les angles de vecteurs. En particulier, comme on sait que la somme des angles d'un triangle vaut π (avec des angles de vecteurs), la somme des angles entre les droites, elle vaut zéro (car $\pi = 0$ dans $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$).

4 Angle au centre et angles inscrits

Voici plusieurs résultats connus reformulés avec des angles de droites.

Théorème 4.1 (Angle au centre)**.** Soient A et B deux points distincts sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Alors :

$$\forall M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}, \quad (MA, MB) = \frac{1}{2}(OA, OB).$$

Remarque : ceci est simplement l'énoncé vectoriel avec des angles divisés par deux, ce qui donne des classes dans $\mathbb{R}\pi\mathbb{Z}$ *c'est-à-dire des angles de droites.*

Ce résultat entraîne :

Théorème 4.2 (Angles inscrits)**.** Soient A et B deux points distincts sur un cercle $\mathcal{C}$. Alors :

$$\forall M, N \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}, \quad (MA, MB) = (NA, NB).$$

Remarquez qu'avec des angles entre vecteurs, on a seulement

$$\forall M, N \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}, \quad 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$$

et qu'on ne peut pas diviser par deux.

Enfin, la réciproque du théorème de l'angle inscrit s'écrit :

Théorème 4.3 (Angles inscrits, réciproque)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère. Si $(CA, CB) = (DA, DB)$, alors le quadrilatère est inscriptible, autrement dit les quatre points sont cocycliques (appartiennent à un même cercle).