Nombres complexes

22 janvier 2016

1 Rappels / cours accéléré sur les nombres complexes

1.1 Construction

On munit le groupe additif (en fait, l'espace vectoriel) $\mathbb{R}^2$ de la loi de composition interne supplémentaire suivante :

$$(a, b) \times (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

On vérifie que ceci fait de $\mathbb{R}^2$ un anneau (en fait, une $\mathbb{R}$-algèbre), commutatif, avec élément neutre $(1, 0)$ pour la multiplication. On vérifie de plus que tout élément non nul (a, b) admet un inverse pour la multiplication, à savoir $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. On en déduit que $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un corps (commutatif). Ce corps est noté $\mathbb{C}$, ses éléments sont les *nombres complexes*.

Si $z = (x, y)$ est un complexe, sa *partie réelle*, notée $\mathrm{Re}(z)$, est par définition le réel x, et sa *partie imaginaire*, notée $\mathrm{Im}(z)$, est par définition y. Les applications Re et Im, vues comme applications entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$, sont $\mathbb{R}$-linéaires.

Enfin, on note $i = (0, 1)$. On remarque que $i^2 = (-1, 0)$.

Injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ L'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto (x, 0)$ est appelée *injection canonique de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$. On vérifie que ϕ est un morphisme de corps injectif [1]. On identifie donc $\mathbb{R}$ et son image dans $\mathbb{C}$ par ϕ, ce qui permet d'écrire que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. On note $i\mathbb{R}$ le sous-ensemble $\{ix, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Ses éléments sont appelés *imaginaires purs*.

Note : l'identification de $\mathbb{R}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ permet également d'écrire $i^2 = -1$.

Remarque 1.1.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$.*

Écriture algébrique ou cartésienne Soit $z \in \mathbb{C}$. On peut écrire $z = (x, y)$, avec x et y réels, et cette écriture est unique. On peut de plus remarquer que $z = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + i \times (y, 0) = x + iy$, avec l'identification de $\mathbb{R}$ avec l'image de l'injection canonique. Cette écriture du nombre complexe z, à savoir $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$, est l'écriture cartésienne de z. Dorénavant, on interdit d'écrire un complexe comme un couple.

1. L'injectivité est immédiate. Plus généralement, un morphisme de corps est toujours injectif car son noyau est un idéal d'un corps donc nécessairement trivial.

Calculs dans $\mathbb{C}$ On rappelle que $i^2 = -1$. Soient a, b réels et $z = a + ib$. Alors, on peut écrire

$$\frac{a}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

À retenir, l'égalité remarquable $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$.

1.2 Conjugaison

Définition 1.2.1. *Le conjugué d'un nombre complexe z est $\mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$. Il est noté $\overline{z}$. La conjugaison (complexe) est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto \overline{z}$.*

Proposition 1.2.2. *La conjugaison complexe est un automorphisme involutif*[2] *de corps.*

Autrement dit, $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$, $\overline{0} = 0$, $\overline{1} = 1$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$, et $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.

Proposition 1.2.3. *Soient $z, z' \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}, \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z},$$

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

1.3 Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+.$$

Il est donc licite de former la racine carrée de $z\overline{z}$.

Définition 1.3.1. *On note $|z|$ et on appelle* module de z *le nombre réel positif $\sqrt{z\overline{z}}$.*

Si z est réel, le module de z est la valeur absolue de z. Ceci explique la notation $|z|$ pour le module.

Proposition 1.3.2.
1. $|1| = 1$.
2. $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |zz'| = |z| \cdot |z'|$.
3. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
4. $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) \leq |z|$, *avec égalité ssi* $z \in \mathbb{R}_+$.
5. $\forall z, z' \in \mathbb{C},\ |z + z'| \leq |z| + |z'|$, *avec égalité ssi* $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \,/\, z' = \lambda z$.

Démonstration.
1. RAS
2. les deux membres étant positifs, ils sont égaux ssi leurs carrés $(zz')(\overline{zz'})$ et $(z\overline{z}) \cdot (z'\overline{z'})$ sont égaux, ce qui est le cas.
3. RAS

2. On rappelle qu'une application f d'un ensemble X dans lui-même est dite involutive si $f \circ f = \mathrm{Id}_X$.

4. On remarque que

$$\mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z)| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} \leq \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = |z|$$

avec égalité ssi les deux inégalités sont des égalités, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(z) = 0$ et $\mathrm{Re}(z) = |\mathrm{Re}(z)|$, autrement dit $z \in \mathbb{R}_+$.

5. Si $z' = 0$ c'est trivial, si $z' = 1$ on a par le point précédent

$$|z + z'|^2 = |z + 1|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1 \leq |z|^2 + 2|z| + 1 = (|z| + 1)^2 = (|z| + |z'|)^2$$

avec égalité ssi $z \in \mathbb{R}_+$. Si z' est quelconque mais non nul, on applique le cas particulier précédent à z/z', et on obtient l'inégalité avec égalité ssi $z/z' \in \mathbb{R}_+$.

$\square$

Corollaire 1.3.3. *1. L'application module restreinte à $\mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupes multiplicatifs de $(\mathbb{C}^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.*

2. Le module est une norme *sur $\mathbb{C}$ vu comme le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$.*

Définition 1.3.4. *On appelle* cercle unité de $\mathbb{C}$ *et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.*

On a $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$, il contient 1, et si $z, z' \in \mathbb{U}$, alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = 1$ et donc $z/z' \in \mathbb{U}$. On en déduit que $\mathbb{U}$ est un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

1.4 Exponentielle complexe

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}$ est absolument convergente. On définit l'application

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{z^k}{k!}.$$

Proposition 1.4.1. *1.* $\exp$ *est un morphisme surjectif de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$.*

2. $\mathrm{Ker}\exp = 2i\pi\mathbb{Z}$.

Si $\theta \in \mathbb{R}$, on (re ?)définit $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ comme les parties réelles et imaginaires de $\exp(i\theta)$. On note souvent e^z au lieu de $\exp(z)$. On peut ensuite démontrer toutes les formules de trigonométrie à l'aide des propriétés de l'exponentielle complexe.