Université de Lorraine **Faculté des sciences et technologies**
L2 Mathématiques 31/05/2016

Examen de géométrie - Durée : 2h

Consigne s'appliquant à tous les exercices : faire obligatoirement des figures. Elles devront être précises, grandes et lisibles, et seront systématiquement notées.
Le barème dépassera 20 points pour tenir compte de la longueur du sujet.

Exercice 1. Énoncer et démontrer le théorème de l'angle au centre dans sa formulation du cours, avec les angles orientés de vecteurs.

Exercice 2. Énoncer le théorème de l'angle inscrit ainsi que sa réciproque, avec les notations du complément de cours c'est-à-dire avec des angles de droites. On ne demande pas de preuve.

Exercice 3. Une bissectrice (intérieure ou extérieure) en A d'un triangle ABC non isocèle en A recoupe le cercle Γ circonscrit à ce triangle en I. Montrer que I appartient à la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 4 (Théorèmes de Thébault et de Van Aubel)**.** Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe direct. On construit quatre carrés qui s'appuient extérieurement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les centres respectifs de ces carrés sont notés P, Q, R et S.

1. Montrer que dans le carré construit sur $[AB]$, on a $p = \frac{a-ib}{1-i}$. Démontrer des relations analogues pour les autres carrés.
2. Montrer le théorème de Van Aubel : $PQRS$ est un *pseudo-carré*, c'est-à-dire que ses diagonales sont de même longueur et se croisent à angle droit. Pour cela, calculer $\frac{s-q}{r-p}$.
3. (Théorème de Thébault) Dans le cas particulier où $ABCD$ est un parallélogramme, montrer que $PQRS$ est un carré.

Exercice 5. Soient A, B, C et D les quatre points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$.

1. Calculer les coordonnées de l'isobarycentre G des quatre points.
2. Montrer que les points sont les sommets d'un tétraèdre régulier $\mathcal{T}$.
3. Donner des équations des quatre plans d'appui du tétraèdre, c'est-à-dire les plans contenant les faces.
4. Pour chaque plan d'appui, préciser de quel côté se trouve le tétraèdre et en déduire une description du tétraèdre par quatre inégalités.
5. (Bonus) En déduire des inégalités pour l'intersection du tétraèdre avec le plan $z = 1/2$. Faire une figure exacte de cette intersection : choisir un repère orthonormé de ce plan (le plus simple possible), tracer les droites nécessaires et hachurer la zone du plan recherchée.

Exercice 6 (Formule de Héron)**.** Soit ABC un triangle. On note a (resp. b, c) la longueur du côté opposé à A (resp. B, C). On note de plus S son aire, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ le demi-périmètre. Le but de l'exercice est de démontrer de deux manières la formule de Héron :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Les deux preuves sont indépendantes et introduisent leurs propres notations. On fera une figure pour chacune des deux preuves.

1. (Preuve avec Al-Kashi) On note α l'angle en A.
   (a) Exprimer S en fonction de α, b et c.

(b) Calculer $\cos(\alpha)$ en fonction de a, b et c. C'est la *loi des cosinus*. Ce résultat est aussi appelé *théorème d'Al-Kashi* (en France), ou encore *théorème de Pythagore généralisé*.

(c) Calculer de même $|\sin(\alpha)|$ en factorisant le plus possible et conclure.

2. (Preuve avec les nombres complexes) On note $\mathcal{C}$ le cercle inscrit, I son centre et r son rayon. On note également x (resp. y, z) la distance entre A (resp. B, C) et le point de tangence entre $\mathcal{C}$ et $[AB]$ (resp. $[BC]$, $[CA]$).

   (a) Montrer que $S = rp$.

   (b) Exprimer $p(p-a)(p-b)(p-c)$ en fonction de x, y et z.

   (c) Soient $z_1 = r + ix$, $z_2 = r + iy$ et $z_3 = r + iz$. Calculer de deux façons différentes $z_1 z_2 z_3$. En déduire que $r^2 = xyz/(x+y+z)$ et conclure.

Exercice 7 (Loi des sinus)**.** Soit ABC un triangle. On note a (resp. b, c) la longueur du côté opposé à A (resp. B, C) et on note α (resp. β, γ) l'angle en A (resp. B, C). La loi des sinus est l'égalité des trois quantités :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Dans cet exercice on propose de la démontrer de plusieurs manières, dans des versions plus ou moins précises. Les preuves sont indépendantes. On fera des figures différentes pour chaque preuve.

1. (Preuve rapide) Montrer le résultat (on demande une preuve courte et différente des preuves suivantes).

2. (Preuve plus précise avec l'aire) Calculez les trois quantités en fonction de a, b, c et de l'aire S du triangle et en déduire le résultat.

3. (Preuve plus précise avec des angles inscrits) Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC, R son rayon et D le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à B.

   (a) On suppose que D est différent de A et de C. Montrer l'égalité $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.

   (b) Montrer la même égalité dans les cas exclus par l'hypothèse précédente et conclure.

4. (Preuve avec les nombres complexes)

   (a) On suppose que A a pour affixe 0, que B a pour affixe 1, et on note z l'affixe de C. *(Attention, a b et c sont toujours les longueurs introduites par l'énoncé : ce ne sont* ***pas*** *les affixes des points.)* Montrer l'égalité $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ en écrivant les deux quantités en fonction de z.

   (b) Prouver le cas général.

Correction 1. Cours.

Correction 2. Cours.

Correction 3. TD.

Correction 4. TD.

Correction 5.

1. L'isobarycentre des quatre points a pour coordonnées $(1/2, 1/2, 1/2)$.
2. Dans le cas demandé, il suffit de montrer que toutes les distances entre les points sont égales. Ceci est suffisant pour montrer que les quatre faces sont des triangles équilatéraux et que le polyèdre est un tétraèdre régulier. Comme il y a quatre points, il y a $\binom{4}{2} = 6$ distances à calculer. On a par exemple $AB = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0} = \sqrt{2}$. Les autres distances valent également $\sqrt{2}$.

3. Le plan ABC admet $\overrightarrow{n} := \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ comme vecteur normal. Comme ce vecteur a pour coordonnées
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},$$
on en déduit que le plan ABC a pour équation $x - y - z = d$, où $d \in \mathbb{R}$ doit encore être déterminé. Comme A appartient au plan, ses coordonnées doivent vérifier l'équation, d'où on tire $d = 0$. Ainsi, l'équation du plan ABC est :
$$x - y - z = 0.$$
Pour les trois autres plans ABD, ACD et BCD on obtient de la même manière les équations $x - y + z = 0$, $x + y - z = 0$ et $x + y + z = 2$.
4. Le plan ABC ayant pour équation $x - y - z = 0$, le tétraèdre se trouve soit dans le demi-espace $x - y - z \leqslant 0$, soit dans le demi-espace $x - y - z \geqslant 0$. Comme G appartient au tétraèdre et que $x_G - y_G - z_G = -1/2$, on en déduit que le tétraèdre appartient au demi-espace $x - y - z \leqslant 0$. On procède de même pour les trois autres plans d'appui, ce qui donne la caractérisation :
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z \leqslant 0 \\ x - y + z \geqslant 0 \\ x + y - z \geqslant 0 \\ x + y + z \leqslant 2 \end{cases}$$

5. En remplaçant z par $1/2$, on trouve les quatre inégalités caractérisant les abscisses et ordonnées de l'intersection du tétraèdre avec le plan d'équation $z = 1/2$. Finalement, on a :
$$\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{T} \text{ et } z = 1/2\right) \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1/2 \\ x - y \leqslant 1/2 \\ x - y \geqslant -1/2 \\ x + y \geqslant 1/2 \\ x + y \leqslant 3/2 \end{cases}$$
Si on munit le plan $z = 1/2$ du repère orthonormé $((0, 0, 1/2), \vec{i}, \vec{j})$, l'intersection est le carré dont les sommets ont pour coordonnées $(1/2, 0)$, $(1, 1/2)$, $(1/2, 1)$ et $(0, 1/2)$.

Correction 6. 1. (Preuve avec Al-Kashi)

(a) On a $S = |bc\sin(\alpha)|/2$, car l'aire est la moitié de celle du parallélogramme porté par AB et AC. Or, ce dernier a pour aire $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| = |bc\sin\alpha|$.

(b) (Al-Kashi)

Il existe de très nombreuses preuves. La plus courte est celle utilisant l'outil le plus évolué disponible en géométrie plane au lycée, à savoir le produit scalaire :

$$a^2 = BC^2 = ||\overrightarrow{CB}||^2 = ||\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 - 2\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle + ||\overrightarrow{AC}||^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\alpha).$$

(c) On obtient donc

$$|\sin(\alpha)| = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)} = \sqrt{1-\left(\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}\right)^2}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{bc|sin\alpha|}{2} &= \frac{1}{4}\sqrt{(4b^2c^2+a^2-b^2-c^2)(4b^2c^2-a^2-b^2+c^2)}\\ &= \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{16}} \qquad = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\end{aligned}$$

2. (Preuve avec les nombres complexes)

(a) On a

$$S = Aire(ABC) = Aire(ABI)+Aire(IBC)+Aire(CIA) = r\frac{AB}{2}+r\frac{BC}{2}+r\frac{CA}{2} = rp.$$

(b) On a $p = x+y+z$, $p-a = x$, $p-b = y$ et $p-c = z$, d'où

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = (x+y+z)xyz.$$

(c) D'une part, on a

$$z_1z_2z_3 = (r+ix)(r+iy)(r+iz) = r^3 - r(xy+yz+zx) + i\left(r^2(x+y+z) - xyz\right).$$

D'autre part, comme $\widehat{AIB} + \widehat{BIC} + \widehat{CIA} = 2\pi$, on a $\mathrm{Arg}(z_1z_2z_3) = \sum \mathrm{Arg} z_i = \pi$, autrement dit $z_1z_2z_3$ est réel, donc sa partie imaginaire est nulle. On en déduit $r^2(x+y+z) - xyz = 0$. Comme $x+y+z \neq 0$, ceci est équivalent à :

$$r^2 = \frac{xyz}{x+y+z}.$$

En utilisant les questions précédentes, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}S = pr &= (x+y+z)\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}\\ &= \sqrt{xyz(x+y+z)}\\ &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.\end{aligned}$$

Correction 7. 1. (Preuve rapide) Soit h la longueur de la hauteur issue de C. Alors on a $h = a\sin(\beta) = b\sin(\alpha)$, d'où $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. On montre de même les deux autres égalités.

2. (Preuve plus précise avec l'aire) Avec les mêmes notations, on a l'aire S est égale à $ch/2 = cb\sin(\alpha)/2$, d'où $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{abc}{2S}$. On prouve de même les deux autres égalités, ce qui donne la forme plus précise de la loi des sinus :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2S}.$$

3. (Preuve plus précise avec des angles inscrits)
   (a) Les angles géométriques α et $\widehat{BDC}$ interceptent la même corde $[BC]$ dont sont égaux ou supplémentaires. Ils ont donc même sinus. On a $\sin\alpha = \sin\widehat{BDC}$. Or, BDC est rectangle en C et on a donc $\sin\alpha = 2R/a$, d'où $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$.
   (b) Si $D = C$ ou $D = A$, cela signifie que ABC est rectangle en A ou C et dans ce cas on a facilement $\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$. L'égalité est donc toujours vraie, et les deux autres se montrent de la même manière.
4. (Preuve avec les nombres complexes)
   (a) Dans ce cas particulier, on a $c = 1$, $b = |z|$, et $a = |z-1|$. D'une part, on a $\sin(\alpha) = \mathrm{Im}(z)/|z|$. D'autre part, on a $\sin(\beta) = \mathrm{Im}(z-1)/|z-1|$. On en déduit que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{|z-1|\cdot|z|}{\mathrm{Im}(z)} = \frac{|z|\cdot|z-1|}{\cdot\,\mathrm{Im}(z-1)} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

   (b) La formule à prouver est invariante par similitude. Or, il existe une similitude envoyant $[AB]$ sur le segment reliant les points d'affixes 0 et 1.