Partiel du 22 mars 2016
Durée : 2h — Annexe à rendre

Les figures sont notées. Les figures trop petites ou illisibles n'obtiendront pas (ou peu) de points. Il peut être nécessaire de faire une figure au brouillon pour se faire une idée de la configuration des points avant de tracer la figure au propre.

Le barème tiendra compte de la longueur du sujet.

Rappels

La somme des angles d'un triangle ABC vaut π. Avec des angles orientés de vecteurs, ceci s'écrit $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})+(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})+(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})=\pi$. (Attention à l'orientation des angles.) Avec des angles de droites, cela donne $(AB,AC)+(CA,CB)+(BC,BA)=0$ ou encore $(BA,AC)+(AC,CB)+(CB,BA)=0$.

On rappelle également le théorème de l'angle inscrit et sa réciproque dans leur formulation avec des angles de droites : un quadrilatère $ABCD$ est inscriptible ssi $(AB,AC)=(DB,DC)$.

Exercice 1. [Cours : théorème de l'angle au centre] Énoncer et démontrer le théorème de l'angle au centre, dans sa formulation vue en cours : celle avec des angles orientés de vecteurs. Faire une figure.

Exercice 2. [Théorème de Pappus] On rappelle l'énoncé du théorème de Pappus, vu en cours :

Soient D et D' deux droites. Soient A,B,C trois points distincts sur D, et A', B' et C' trois points distincts (et distincts des précédents) sur D'. Si $(AB')//(BC')$ et $(BA')//(CB')$, alors $(AA')//(CC')$.

1. (Cours) Prouver le théorème lorsque les droites D et D' sont sécantes en un point O distinct des précédents. Faire une figure.
2. Prouver le théorème lorsque les droites D et D' sont parallèles. La preuve est similaire. Faire une figure.

Rappel : il s'agit d'introduire certaines transformations adéquates qui commutent.

Exercice 3. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments parallèles de longueurs non nulles distinctes. Soient ϕ et ϕ' les homothéties de centres O et O' vérifiant : $\phi(A)=C$, $\phi(B)=D$, et : $\phi'(A)=D$, $\phi'(B)=C$. Faire une figure en plaçant O et O'. Montrer que (OO') coupe $[AB]$ (resp. $[CD]$) en son milieu I (resp. J).

Exercice 4. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles sécants en P et Q, et $\mathcal{D}_P$ (respectivement $\mathcal{D}_Q$) une droite passant par P (resp. Q). On note C et E (resp. D et F) l'intersection de $\mathcal{D}_P$ (resp. $\mathcal{D}_Q$) avec les deux cercles. Montrer que $(CD)//(EF)$.

Exercice 5. [Théorème de Desargues, version affine]

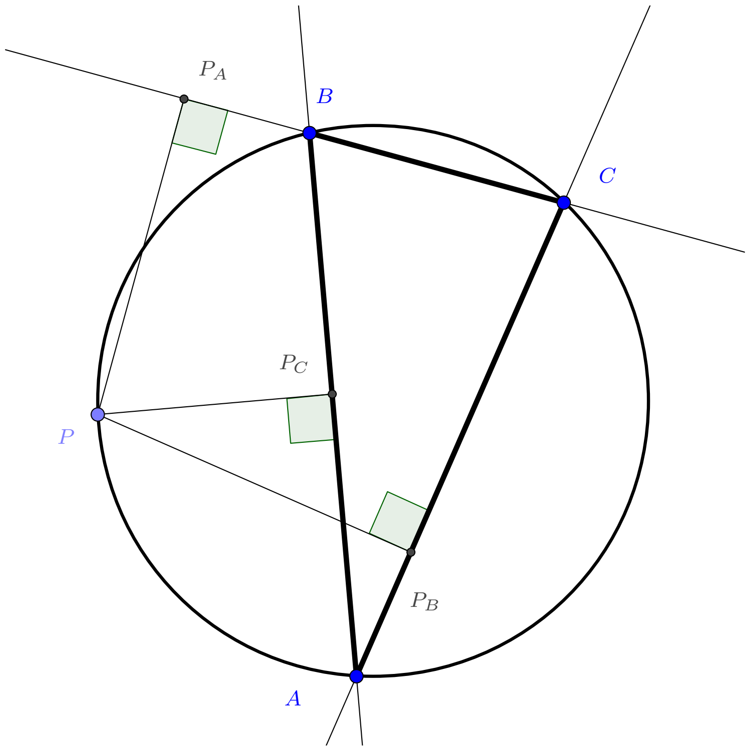
1. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles (non aplatis) sans sommet commun. Montrer qu'ils se déduisent l'un de l'autre par homothétie ou translation ssi leurs côtés sont parallèles. Faire des figures.
2. (Application) On donne (en annexe) deux droites se coupant en un point O hors de la feuille, ainsi qu'un point M hors de ces droites. Tracer très précisément la droite (OM) sur la figure fournie en annexe, en justifiant la construction.

Exercice 6. Soit ABC un triangle équilatéral direct et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit M un point de l'arc d'extrémités B et C ne contenant pas A. Le but de l'exercice est de montrer que $AM = MB + MC$.

1. Faire une figure.
2. Calculer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}})$.
3. Justifier qu'il existe un unique point D sur le segment $[AM]$ tel que DMB soit équilatéral. Placer ce point sur la figure en expliquant sa construction.
4. Sur la figure, marquer tous les angles (géométriques) qui sont égaux à $\widehat{BMC}$, $\widehat{MCB}$ ou $\widehat{CBM}$, et rédiger une solution de l'exercice s'appuyant sur des considérations d'angles.
5. (Bonus) Rédiger l'exercice d'une autre façon, en utilisant une rotation.

Exercice 7. Soit ABC un triangle. À tout point P du plan on associe ses projetés orthogonaux P_A, P_B et P_C sur les droites (BC), (CA) et (AB).

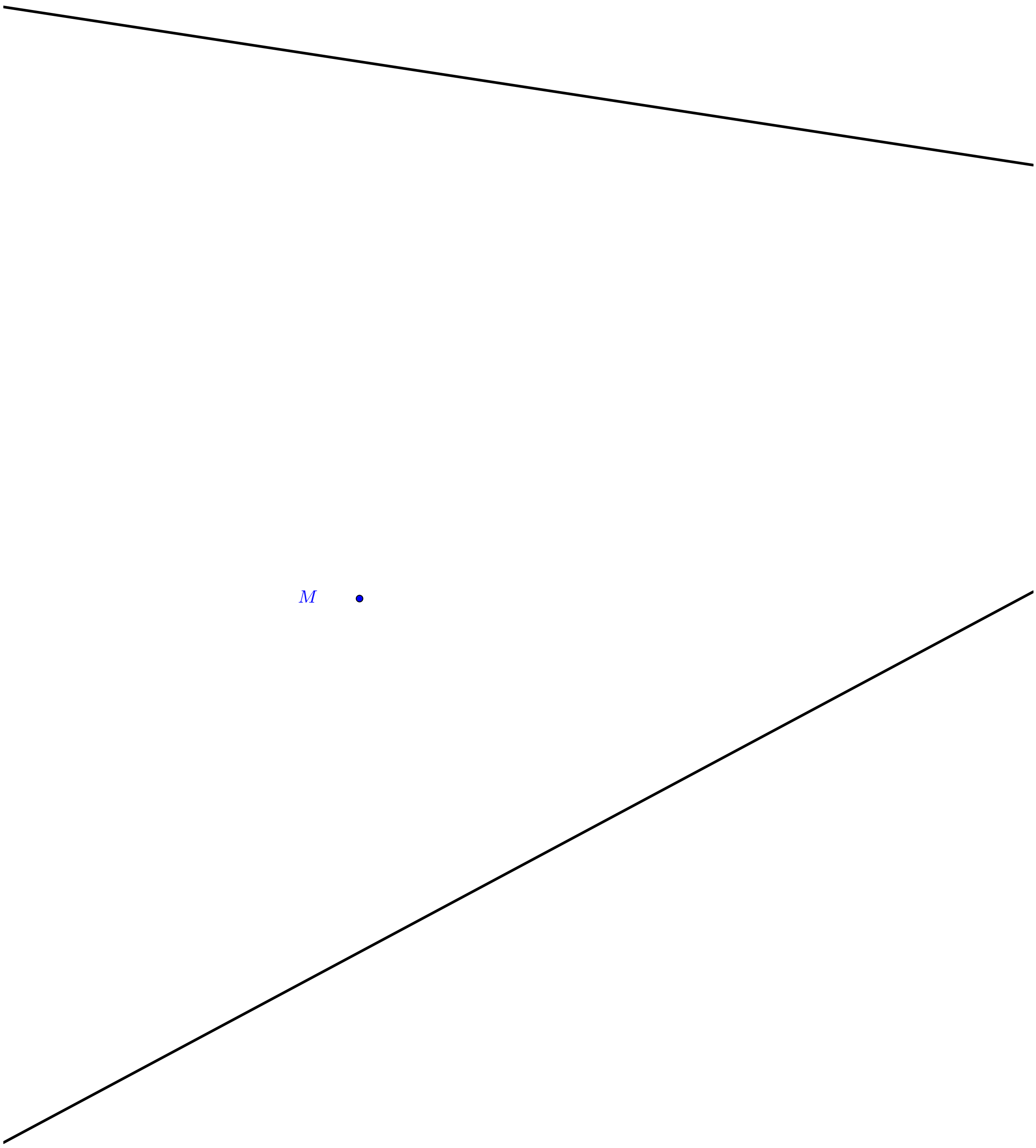
Le but de l'exercice est de montrer que P_A, P_B et P_C sont alignés ssi P appartient au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à ABC. (Sur la figure ci-dessous, on peut vérifier expérimentalement que le sens « si » marche – du moins dans cette configuration précise.)



1. Tracer une figure dans le cas où P est sur le cercle $\mathcal{C}$, comme dans la figure ci-dessus, mais plus grande.
2. Montrer que P_A, P_C, B et P d'une part, et P_A, P_B, C et P d'autre part, sont cocycliques.
3. Tracer ces deux cercles.
4. Terminer l'exercice en utilisant les caractérisation suivantes que l'on ne démontrera pas (c'est du cours) :
   (a) Les points P_A, P_B et P_C sont alignés ssi $(P_AP_B, P_AP) = (P_AP_C, P_AP)$.
   (b) Le point P appartient à $\mathcal{C} \setminus \{B, C\}$ ssi $(BP, BA) = (CP, CA)$.

NE PAS OUBLIER DE RENDRE L'ANNEXE.

NOM et prénom :



Correction

(En cours de relecture, et il manque quelques figures, le fichier sera mis à jour à cette même adresse)

Correction de 1 Cours.

Correction de 2

1. Cours.
2. Comme dit en cours, il suffit de remplacer les homothéties par des translations. Deux translations quelconques commutent. Par hypothèse, $ABC'B'$ et $BCB'A'$ sont des parallélogrammes. Notons ϕ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}(=\overrightarrow{B'C'})$ et ψ celle de vecteur $\overrightarrow{BC}(=\overrightarrow{A'B'})$. Alors on a par construction $\psi\circ\phi(A)=C$ et $\phi\circ\psi(A')=C'$. Or, $\phi\circ\psi=\psi\circ\phi$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. On en déduit que $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$, donc en particulier $(AA')//(CC')$.

Correction de 3 Exercice de la feuille 2, corrigé en TD.

Correction de 4 Exercice de la feuille 3, corrigé en TD.

Correction de 5 (Exercice de la feuille 2, non corrigé en TD.)

1. (a) (Sens « seulement si ») Par hypothèse, il existe ϕ, une translation ou homothétie, telle que (quitte à renommer les sommets du second triangle) : $\phi(A)=A'$, $\phi(B)=B'$ et $\phi(C)=C'$. Alors, leurs côtés sont parallèles car une translation ou homothétie envoie une droite sur une droite parallèle.

   (b) (Sens « si ») Supposons cette fois que les côtés des triangles sont parallèles, c'est-à-dire (toujours quitte à renommer les sommets) : $(AB)//(A'B')$, $(BC)//(B'C')$ et $(CA)//(C'A')$. Comme les segments $[AB]$ et $[A'B']$ sont parallèles, il existe ϕ une homothétie ou translation envoyant A sur A' et B sur B'. Il suffit maintenant de montrer que $\phi(C)=C'$.

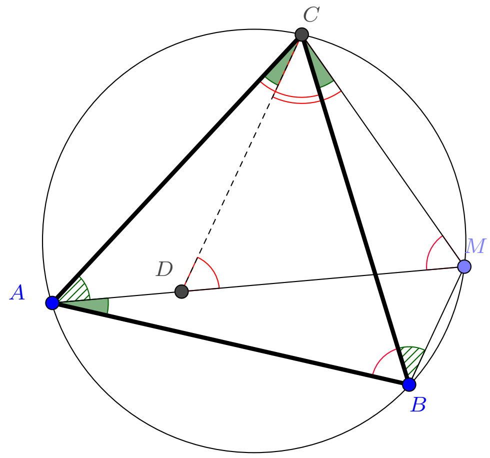
   D'une part, $\phi(C)$ appartient à la parallèle à (AC) passant par $\phi(A)=A'$, c'est-à-dire par hypothèse appartient à la droite $(A'C')$.

   D'autre part, $\phi(C)$ appartient à la parallèle à (BC) passant par $\phi(B)=B'$, donc appartient à la droite $(B'C')$.

   Donc $\phi(C)$ appartient à $(A'C')\cap(B'C')$. Les triangles n'étant pas plats, les deux droites sont sécantes, et l'intersection est réduite à un seul point, C'. Donc $\phi(C)=C'$, ce qu'il fallait démontrer.
2. Il suffit de tracer un triangle MNP avec N sur la première droite et P sur la seconde, puis de tracer un deuxième triangle $M'N'P'$ avec des côtés parallèles au premier triangle, et avec N' sur la première droite et P' sur la seconde.

   Par le théorème de Desargues démontré dans la première question, les triangles se déduisent l'un de l'autre par homothétie ou translation, donc les droites (MM'), (NN') et (PP') sont parallèles ou concourantes. Comme elles ne sont parallèles dans la figure donnée, elles sont concourantes. La droite (MM') répond bien à la question.

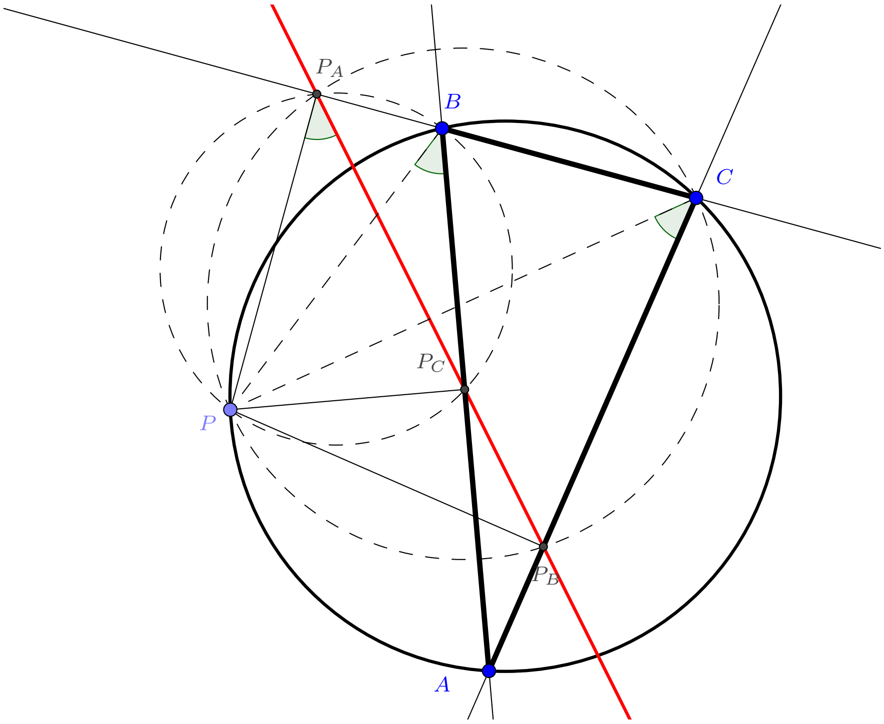
Correction de 6



1. Traçons une figure.
2. Les points $CMBA$ sont cocycliques, donc par le cours on a une égalité d'angles de vecteurs : $2(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$. D'après l'énoncé, M et B sont sur la même corde d'extrémités A et C, donc on a en fait $(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$. Cet angle vaut $\pi/3$ car ABC est équilatéral direct.
3. Comme $AM = AD + DM$ et que d'autre part $DM = CM$ par construction de D, <u>il suffit de montrer que $AD = BM$</u>. Comme $ACMB$ est inscriptible, on a les égalités suivantes d'angles de droites : $(AC, AM) = (BC, BM)$ et $(CB, CM) = (AB, AM)$. On voit aussi que par construction, $(CA, CB) = \pi/3 = (CD, CM)$, et donc $(CA, CD) = (CA, CB) + (CB, CD) = \pi/3 + (CB, CD) = (CB, CD) + \pi/3 = (CB, CD) + (CD, CM) = (CB, CM)$. Donc les triangles CAD et CBM ont deux angles (et donc trois) en commun, donc sont semblables. Comme $CA = CB$, ils sont en fait isométriques, par une isométrie ϕ telle que $\phi(A) = B$ et $\phi(D) = M$. On en déduit $AD = BM$, ce qu'il fallait démontrer.
4. Considérons la rotation ρ de centre C et d'angle $\pi/3$. Par construction, on a $\rho(A) = B$, et par construction de D, le triangle CDM est équilatéral direct donc $\rho(D) = M$. Comme une rotation est une isométrie c'est-à-dire préserve les distances, on a $BM = \rho(A)\rho(D) = AD$, ce qu'il restait à démontrer ($CM = DM$ toujours par construction de D). La rotation ρ est en fait l'isométrie ϕ détectée dans la question précédente.

Correction de 7

1. Figure :



2. Par construction, PP_AB est rectangle en P_A, donc P_A appartient au cercle de diamètre $[PB]$. De même, PP_CB est rectangle en P_C, donc P_C appartient au cercle de diamètre $[PB]$. En particulier, P_A, P_C, B et P sont cocycliques (et $[PB]$ est un diamètre).

   Le même raisonnement montre que P_A, P_B, C sont cocycliques (et que $[PC]$ est un diamètre).
3. Voir figure.
4. Il suffit d'utiliser les deux cercles de la manière suggérée par l'énoncé. On a d'abord :

$$\begin{aligned}(P_AP_B, P_AP) &= (CP_B, CP) \text{ car } PP_BCP_B \text{ est inscriptible}\\ &= (CA, CP) \text{ car } (CP_B) = (CA).\end{aligned}$$

   Ensuite, l'énoncé nous rappelle que

$$(CA, CP) = (BA, BP) \text{ ssi } P \text{ appartient au cercle circonscrit à } ABC.$$

   Et on peut ensuite continuer :

$$\begin{aligned}(BA, BP) &= (BP_C, BP) \text{ car } (BP_C) = (BA)\\ &= (P_AP_C, P_AP) \text{ car } PP_ABP_C \text{ est inscriptible}\end{aligned}$$

   Finalement, on a bien montré :

$$(P_AP_B, P_AP) = (P_AP_C, P_AP) \text{ ssi } P \text{ appartient au cercle circonscrit à } ABC.$$