

Prépa agreg de Nancy — Questions d'oral

(Cette version du pdf = questions triées par domaine et niveau)

Damien Mégy

20 juillet 2026

- Dernière version : <https://dmegy.perso.math.cnrs.fr/agreg/questions/questionsParDomaine.pdf>.
- Questions en vrac +indications : <https://dmegy.perso.math.cnrs.fr/agreg/questions/questions.pdf>
- Attention, la classification par domaine et niveau est très approximative. Work in progress.

Table des matières

1 Algèbre linéaire (38 questions)	1
2 Algèbre linéaire : réduction (80 questions)	4
3 Algèbre linéaire, bilinéaire et euclidienne (43 questions)	9
4 Algèbre linéaire : calcul fonctionnel (21 questions)	12
5 Algèbre : anneaux (33 questions)	14
6 Algèbre : groupes (102 questions)	16
7 Algèbre : polynômes et corps (106 questions)	22
8 Analyse complexe (70 questions)	29
9 Analyse fonctionnelle (63 questions)	34
10 Analyse : fonctions réelles et calcul intégral (131 questions)	39
11 Analyse : suites et séries (120 questions)	48
12 Analyse : équations différentielles (48 questions)	56
13 Arithmétique (53 questions)	59
14 Calcul différentiel (32 questions)	63
15 Combinatoire (17 questions)	65
16 Géométrie (38 questions)	66
17 Probabilités (43 questions)	69
18 Théorie des ensembles (6 questions)	72
19 Topologie (72 questions)	72
20 [AUTRE] (8 questions)	76
21 [HP] Distributions (5 questions)	77
22 [HP] Représentations (22 questions)	77

1 Algèbre linéaire (38 questions)

Question 1.1 (ID : 1053). Soit $n \in \mathbb{N}$, et A une matrice $n \times n$. Quel nombre minimum de coefficients est-il suffisant de modifier pour être certain que A devienne inversible ?

Question 1.2 (ID : 1166). Pour des parties A , B et C d'un ensemble fini E , le cardinal de leur union est donné par :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ &\quad - (\text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(A \cap C) + \text{Card}(B \cap C)) \\ &\quad + \text{Card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Maintenant, désignons par A , B et C des sous-espaces vectoriels d'un k -ev de dimension finie E . Montrer que la formule analogue suivante est **FAUSSE** :

$$\begin{aligned} \dim(A + B + C) &= \dim(A) + \dim(B) + \dim(C) \\ &\quad - (\dim(A \cap B) + \dim(A \cap C) + \dim(B \cap C)) \\ &\quad + \dim(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Où se situent les problèmes (ou au moins certains d'entre eux) ?

Question 1.3 (ID : 1169). Soit n et A , B , C et D quatre matrices carrées $n \times n$. L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det D - \det C \det B$$

Question 1.4 (ID : 1170). Soit n et A , B , C et D quatre matrices carrées $n \times n$. L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB)$$

Question 1.5 (ID : 1329). Soit A une matrice inversible et triangulaire supérieure. Son inverse est-elle triangulaire supérieure ?

Question 1.6 (ID : 1443). On introduit M , la matrice avec des a sur la diagonale, des b tout au-dessus et des c tout en dessous. Calculer le déterminant de M .

Question 1.7 (ID : 1444). Quel est le coût du pivot de Gauss pour un déterminant ?

Question 1.8 (ID : 1451). Est-ce que $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BAC)$?

Question 1.9 (ID : 1753). Soient u et v deux endomorphismes d'un ev de dimension finie. Montrer

$$\text{rg}(u + v) \leq \text{rg } u + \text{rg } v \quad \text{et} \quad \text{rg}(u \circ v) \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$$

Question 1.10 (ID : 2038). Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$ admet-il une solution unique ? Une infinité de solutions ? Aucune solution ?

★ ★ ★

Question 1.11 (ID : 1079). Montrer que deux matrices circulantes commutent.

Question 1.12 (ID : 1135). Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Question 1.13 (ID : 1136). Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Question 1.14 (ID : 1252). Soit f une fonction de $M_n(k)$ dans k , telle que $f(I_n) \neq 0$, $f(0_n) = 0$, et $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer qu'une matrice M est inversible ssi $f(M) \neq 0$.

Question 1.15 (ID : 1256). À quoi servent les déterminants classiques qu'on croise partout ? (Vandermonde, Cauchy...)

Question 1.16 (ID : 1261). Montrer que toute forme linéaire sur les matrices est de la forme $M \mapsto \text{Tr}(AM)$.

Question 1.17 (ID : 1292). Résoudre sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{F}_p$ le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Question 1.18 (ID : 1323). Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, diagonalisables. Montrer que si $A^3 = B^3$, alors $A = B$. Comment généraliser ce résultat ?

Question 1.19 (ID : 1610). On dit qu'une matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ est « $\mathbb{C}$ -linéaire » si l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ induite par l'identification canonique de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{C}$ -linéaire. Est-ce que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est $\mathbb{C}$ -linéaire ?

Question 1.20 (ID : 2140). Donner une matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ non contractante pour la métrique euclidienne mais dont les vp vérifient $|\lambda| < 1$.

★ ★ ★

Question 1.21 (ID : 1025). Comparer les rangs sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{F}_p$ d'une matrice entière. Que dire de l'ensemble des p où le rang diffère ?

Question 1.22 (ID : 1050). Montrer que le centre de $GL(E)$ est l'ensemble des homothéties.

Question 1.23 (ID : 1052). Quel est le rapport entre le fait que GL est engendré par les transvections et dilatations, et le fait que le pivot de Gauss laisse le rang inchangé ?

Question 1.24 (ID : 1096). Soit $M \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que pour tout premier p , la réduction de M modulo p est un projecteur dans $M_n(\mathbb{F}_p)$. Montrer que M est un projecteur.

Question 1.25 (ID : 1144). Dans $M_n(\mathbb{R})$, les conditions de non inversibilité, de non diagonalisabilité ou de nilpotence, sont des conditions de mesure nulle. Que peut-on dire sur un corps fini ?

Question 1.26 (ID : 1159). Peut-on avoir deux éléments $A, B \in M_n(k)$ dont le crochet de Lie vaut l'identité, autrement dit tels que $AB - BA = I_n$?

Question 1.27 (ID : 1413). Sur $M_n(\mathbb{R})$, montrer que toute norme est proportionnelle à une norme d'algèbre (c'est-à-dire sous-multiplicative).

Question 1.28 (ID : 1500). Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices inversibles. Le résultat est-il vrai sur tout corps ? (Même fini ?)

Question 1.29 (ID : 1556). L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ est-il isomorphe à l'espace des suites réelles ? (Attention, ce n'est pas parce que deux ev vérifient une inclusion stricte, par exemple, qu'ils ne sont pas isomorphes.)

Soit k un corps quelconque. Est-ce que $k[X]$ est isomorphe à l'espace $k^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans k ?

Question 1.30 (ID : 1613). Dans $M_2(\mathbb{F}_2)$, combien de matrices sont diagonalisables ? Et dans $M_2(\mathbb{F}_3)$? Dans $M_2(\mathbb{F}_q)$?

Question 1.31 (ID : 1614). Dans $M_2(\mathbb{F}_2)$, combien de matrices sont nilpotentes ? Et dans $M_2(\mathbb{F}_3)$? Dans $M_2(\mathbb{F}_q)$?

Question 1.32 (ID : 1615). À quoi cela sert-il de dénombrer les matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$, ou nilpotentes, ou le nombre de solutions d'autres équations algébriques ? Est-ce que cela sert dans d'autres théorèmes, y a-t-il des applications ?

★ ★ ★

Question 1.33 (ID : 1146). Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini.

1. Quelle est la probabilité qu'une matrice de $M_n(\mathbb{F}_q)$ soit non inversible ? Que son déterminant soit égal à 1 ? À un élément $a \neq 0$ fixé ?
2. En déduire que la probabilité $p_n(q)$ qu'une matrice soit dans $SL_n(\mathbb{F}_q)$ est inférieure strictement à $1/q$.
3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(q)$ existe. C'est la probabilité qu'une « grande » matrice sur $\mathbb{F}_q$ soit de déterminant un.
4. (Plus difficile, ouverture) Que savez-vous de la fonction η de Dedekind et la fonction d'Euler (pas l'indicatrice, l'autre, c'est-à-dire le produit infini) ? Sur l'identité d'Euler ? Sur les fonctions modulaires ? Se renseigner.

Question 1.34 (ID : 1812). Sur l'équation de Sylvester : peut-on résoudre $AX + XB = C$ à l'aide d'une EDO si le spectre de A et B n'est plus dans $\{\text{Ré}(\lambda) < 0\}$ mais dans $\{\text{Ré}(\lambda) < 1\}$? Et si les valeurs propres sont de partie réelle positive ?

Question 1.35 (ID : 1813). Soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si l'équation $AX - XB = C$ admet une solution $X \in M_n(\mathbb{R})$, alors les matrices par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ soient semblables. (Plus difficile : la condition est-elle nécessaire ?)

Question 1.36 (ID : 1814). Sur l'équation de Sylvester : donner une CNS sur $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ pour que pour tout C , l'équation $AX + XB = C$ admette une unique solution $X \in M_n(\mathbb{R})$.

Question 1.37 (ID : 1816). Sur l'équation de Sylvester : soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ avec les valeurs propres de A de module $> \rho$ et celles de B de module $< \rho$. Expliquer pourquoi $A^{-1} \sum_{n \geq 0} A^{-n} C B^n$ existe et est une solution de l'équation $AX - XB = C$.

★ ★ ★

Question 1.38 (ID : 1817). Question d'approfondissement sur l'équation de Sylvester : soient $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ et considérons l'équation $AX - XB = C$. Supposons que A et B aient leur spectre imaginaire pur ou bien dans un cercle de module constant. Autrement dit, on se place dans les cas où les représentations classiques sous forme d'intégrale ou de série ne s'appliquent pas. Savez-vous comment obtenir tout de même des représentations sous formes de série ou d'intégrale des solutions ?

2 Algèbre linéaire : réduction (80 questions)

Question 2.1 (ID : 1011). À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Et sur $\mathbb{C}$?

Question 2.2 (ID : 1012). À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Et sur $\mathbb{C}$?

Question 2.3 (ID : 1013). À quelle condition la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?
Et diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

Question 2.4 (ID : 1244). Pour l'action de GL par multiplication à gauche, que dire des noyaux de matrices dans la même orbite ? Réciproque ?

Question 2.5 (ID : 1250). Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Soient A et B des matrices à coefficients dans K , équivalentes sur L . Montrer qu'elles sont équivalentes sur K .

Question 2.6 (ID : 1251). Montrer qu'une matrice carrée est non inversible si et seulement si elle est équivalente à une matrice nilpotente.

Question 2.7 (ID : 1253). Soit A une matrice. Existe-t-il une matrice M telle que $AMA = A$?

Question 2.8 (ID : 1263). Montrer que si le polynôme caractéristique de f est irréductible alors ses seuls sous espaces stables sont l'espace tout entier et $\{0\}$.

Question 2.9 (ID : 1264). Exemple de décomposition de Dunford, et d'application. Quelle est la question-piège canonique sur la décomposition de Dunford ?

Question 2.10 (ID : 1265). Diagonalisez rapidement [matrice 3×3 quelconque].

Question 2.11 (ID : 1266). Lien entre déterminant, trace, coefficients du polynôme caractéristique.

Question 2.12 (ID : 1267). On donne une matrice 3×3 a priori générique, mais avec un polynôme caractéristique potable. Calculer la somme des inverses des valeurs propres.

Question 2.13 (ID : 1268). Comment calculer un polynôme minimal ? Exemples ?

Question 2.14 (ID : 1311). Vrai ou faux :

1. A est diagonalisable ssi A^2 l'est.
2. A est trigonalisable ssi A^2 l'est.

Question 2.15 (ID : 1317). Trouver deux matrices A et B nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente.

Question 2.16 (ID : 1318). Trouver deux matrices A et B diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.

Question 2.17 (ID : 1333). Donner deux exemples d'ev E et d'endomorphisme u de E qui n'admet pas de polynôme annulateur (non nul).

Question 2.18 (ID : 1334). Soit $A \in M_n(k)$. Quel est le groupe des inversibles de l'algèbre $k[A]$? (Lien avec les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?)

Question 2.19 (ID : 1353). Expliquer comment calculer rapidement la décomposition de Jordan-Chevalley (alias Dunford) d'une matrice 2×2 . Par exemple, quelle est la décomposition $D + N$ de $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$?

Question 2.20 (ID : 1473). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 + X = A$.

Question 2.21 (ID : 1474). Déterminer la décomposition $D + N$ des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Aucun calcul nécessaire, à part la recherche de valeurs propres pour la troisième matrice.)

Question 2.22 (ID : 1494). Diagonaliser une matrice, à quoi ça sert ? Donner des exemples de situations où c'est utile et naturel de faire ça.

(Attention, la question n'est pas forcément triviale. Ce qui est demandé avant tout, c'est d'éviter les « mauvaises » réponses.)

Question 2.23 (ID : 1557). Donner deux exemples de matrices 2×2 puis $n \times n$ réelles dont le polynôme minimal est égal à $X^2 + 1$, puis $X^2 + X + 1$.

Question 2.24 (ID : 1558). On suppose que le polynôme caractéristique d'une matrice A est égal à $X^4 + 7X^3 - 5X^2 + X + 3$. Quel est le polynôme caractéristique de A^{-1} ? (Et pourquoi A est-elle inversible ?)

Question 2.25 (ID : 1655). Donner un exemple de $\mathbb{R}$ -ev muni d'un endomorphisme qui n'a aucune valeur propre. Et un $\mathbb{C}$ -ev ?

Question 2.26 (ID : 1738). Soit M une matrice carrée réelle de rang un. À quelle condition (nécessaire et suffisante) est-elle diagonalisable ?

Question 2.27 (ID : 1739). Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice antidiagonale, c'est-à-dire telle que $i + j \neq n + 1 \implies m_{ij} = 0$. À quelle condition (nécessaire et suffisante) est-elle diagonalisable ?

Question 2.28 (ID : 1742). Une matrice de permutation (coefficients tous nuls sauf exactement un 1 par ligne et par colonne) est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?

Question 2.29 (ID : 1796). Exhiber une matrice $M \in M_4(\mathbb{R})$ ayant $X^4 + 2X^2 + 1$ comme polynôme minimal.

Question 2.30 (ID : 1808). Si on veut un exemple de matrice réelle dont le spectre est dans $\{\text{Ré}(\lambda) < 0\}$ et non réel, quelle matrice vous vient à l'esprit ?

Question 2.31 (ID : 1957). Soit f diagonalisable et F un sous-espace stable. L'induit sur F est-il diagonalisable ? Pourquoi ?

Question 2.32 (ID : 1960). Soit $\zeta = e^{2ik\pi/n}$ et A une matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & & & \star \\ & \zeta & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \zeta^{n-1} \end{pmatrix} \in$

$M_n(\mathbb{R})$. Calculer A^n .

Question 2.33 (ID : 1975). Déterminer la décomposition de Dunford (alias Jordan-Chevalley) de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 2.34 (ID : 2032). Une matrice nilpotente est-elle toujours triangulaire supérieure ou inférieure ?

Question 2.35 (ID : 2039). Déterminer le commutant de $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 2.36 (ID : 2040). Présenter deux manières de calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Question 2.37 (ID : 2041). Réduire les matrices suivantes. L'objectif n'est pas de suivre la méthode générale mais de minimiser les calculs et d'expliquer pédagogiquement les raccourcis permettant souvent de « voir » le résultat.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Question 2.38 (ID : 2042). Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = -I$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Et sur $\mathbb{C}$?

Question 2.39 (ID : 2049). Donner un exemple de matrice non trigonalisable.

Question 2.40 (ID : 2118). On considère la matrice diagonale A de taille 3, avec 1, 2, 3 sur la diagonale. Déterminer tous les sous-espaces stables par A .

★ ★ ★

Question 2.41 (ID : 1040). Soient $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ nilpotentes, de même rang et polynôme minimal.

1. Si $n < 7$, montrer que A et B sont semblables.
2. Montrer que ce n'est pas le cas si $n = 7$ ou si les matrices ne sont pas nilpotentes.

Question 2.42 (ID : 1083). Que peut-on dire d'une matrice M telle que $\forall k \geq 1, \text{Tr}(M^k) = 0$?

Question 2.43 (ID : 1104). Montrer qu'il existe une matrice de $M_2(\mathbb{F}_p)$ qui n'est pas trigonalisable.

Question 2.44 (ID : 1105). Trouver toutes les classes de similitude de matrices de $M_2(\mathbb{F}_p)$ tq $\text{Tr}(A) = 2$ et $\det A = 1$.

Est-ce que le commutant (intersecté avec les inversibles) d'une telle matrice est un groupe cyclique ?

Question 2.45 (ID : 1141). La décomposition de Jordan est-elle vraie sur tout corps, par exemple sur un corps fini ? Donner un énoncé correct sur tout corps.

Question 2.46 (ID : 1142). La décomposition de Dunford (ou plutôt Jordan-Chevalley) est-elle vraie sur tout corps, par exemple sur un corps fini ? Donner un énoncé correct sur tout corps.

Question 2.47 (ID : 1150). Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une décomposition $A = D + N$, avec D et N des matrices réelles qui commutent, D diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et N nilpotente. Montrer de plus qu'une telle décomposition est unique et que D et N sont des polynômes en A .

Si l'on remplace $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ par un corps quelconque k et sa clôture algébrique $\bar{k}$, ceci reste-t-il vrai ?

Question 2.48 (ID : 1180). Soit $A \in M_n(\mathbb{F}_q)$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $A^q - A = 0$.

Question 2.49 (ID : 1255). Montrer de deux manières que si deux matrices réelles sont semblables sur $\mathbb{C}$, elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Question 2.50 (ID : 1312). Donner un exemple de matrice réelle 3×3 dont le polynôme minimal est :

1. $X - 1$
2. $(X - 1)^2$
3. $(X - 1)^3$
4. $(X - 1)(X - 2)$
5. $(X - 1)(X - 2)^2$

Est-il vrai que pour tout polynôme réel de degré ≤ 3 , on peut trouver une matrice 3×3 ayant ce polynôme minimal ?

Question 2.51 (ID : 1315). Soit $n > 0$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $\leq n$. Existe-t-il forcément une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est P ?

Question 2.52 (ID : 1450). Dans la décomposition « $D + N$ » de Jordan-Chevalley, quel est l'énoncé précis d'unicité ? Par exemple, pour qu'il y ait unicité, a-t-on besoin de forcer à priori que D et N soient des polynômes en A , ou bien il y a unicité même sans demander ça ?

Question 2.53 (ID : 1479). Est-ce qu'il y a une décomposition de Jordan sur $\mathbb{R}$? Ou sur un corps quelconque ? Quel serait l'énoncé ?

Question 2.54 (ID : 1493). Tout élément de $\mathbb{F}_q$ vérifie $x^q = x$. Est-ce que toute matrice $M \in M_n(\mathbb{F}_q)$ vérifie $M^q = M$? Discuter.

Question 2.55 (ID : 1560). Soit E un k -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $k = \mathbb{R}$, montrer que f admet une droite ou un plan stable.
2. Pour un corps général, montrer qu'on ne peut garantir l'existence d'un espace stable non-trivial. Par exemple, donner une matrice $M \in M_3(\mathbb{Q})$ pour laquelle aucun sous- $\mathbb{Q}$ -ev de $\mathbb{Q}^3$ n'est stable.

Question 2.56 (ID : 1569). Soit u un endomorphisme nilpotent en dimension finie. Quels sont les sous-espaces stables ?

Question 2.57 (ID : 1622). Donner un exemple de $\mathbb{C}$ -ev non trivial E et d'un endomorphisme de E n'ayant aucune valeur propre.

Question 2.58 (ID : 1649). Si une matrice carrée à coefficients entiers est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$, est-elle forcément diagonalisable sur $\mathbb{Z}$?

Question 2.59 (ID : 1654). Donner un exemple de $\mathbb{R}$ -ev muni d'un endomorphisme dont tout réel est valeur propre.

Question 2.60 (ID : 1656). On sait que AB et BA ont même polynôme caractéristique. (Re-prouver le résultat ?)

Ont-elles le même polynôme minimal ?

Question 2.61 (ID : 1695). Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ non diagonalisable et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A^n n'est pas diagonalisable.

Et en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$? Que peut-on dire sur un corps quelconque ?

Question 2.62 (ID : 1715). Soient a, b, c et d des réels. Que dire de la décomposition $D + N$

(Dunford, alias Jordan-Chevalley) de la matrice $\begin{pmatrix} a & & & \\ 1 & b & & \\ & 1 & c & \\ & & 1 & d \end{pmatrix}$?

Question 2.63 (ID : 1797). Soit $P \in k[X]$ et soit M une matrice ayant P pour polynôme minimal. Si $n > 1$, construire une matrice ayant P^n comme polynôme minimal.

Question 2.64 (ID : 1809). Quel est le commutant d'un bloc de Jordan ?

Question 2.65 (ID : 1810). Quel est le commutant d'une matrice cyclique ? Quelle est la dimension de ce commutant ?

Question 2.66 (ID : 1811). Si $M \in M_2(\mathbb{R})$, quelle peut être la dimension du commutant de M ? Pour chaque dimension possible, donner un exemple d'une telle matrice M .

Question 2.67 (ID : 1881). Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$. Quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de son commutant ?

Question 2.68 (ID : 1959). Soit u un endomorphisme de E . Quelle est la relation entre le commutant de u et les polynômes en u ? Quand y a-t-il égalité ? Pourquoi ?

Question 2.69 (ID : 2043). Montrer que toute matrice de $M_2(K)$ est semblable à sa transposée. Savez-vous si c'est vrai en dimension n ?

Question 2.70 (ID : 2048). Quelles sont les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ semblables à leur carré ? Et les matrices de $M_2(\mathbb{C})$ semblables à leur carré ?

Question 2.71 (ID : 2107). Soit M une matrice de taille n , nilpotente d'indice k . Montrer que $k = n$ ssi les espaces stables sont en nombre fini.

Question 2.72 (ID : 2117). Vous donnez comme exemple que les sous-espaces stables par un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence égal à la dimension de l'espace ambiant sont exactement les noyaux itérés. Comment le prouvez-vous ?

★ ★ ★

Question 2.73 (ID : 1077). Montrer que le théorème de Lie (une sous-algèbre de Lie résoluble de $gl(V)$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle est cotrigonalisable) tombe en défaut en caractéristique $p > 0$.

Question 2.74 (ID : 1145). Soit $n \geq 2$ un entier et p un nombre premier.

- Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{F}_p[X]$ tel que tout polynôme de degré n divise P .
- En déduire que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{F}_p)$, $P(A)$ est diagonalisable !
- Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le résultat de la question précédente est-il possible ? (Autrement dit, est-ce qu'il existe un polynôme non nul P tel que $P(A)$ soit diagonalisable pour toute matrice A ?)

Question 2.75 (ID : 1147). Soit k un corps, E un k -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Il est connu (et cela peut constituer un développement) que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable.
2. Le polynôme minimal de f est sans facteur carré.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que f est *semi-simple*.

Si $k = \mathbb{R}$, on sait montrer (exercice) qu'être semi-simple est équivalent à être diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Sur d'autres corps, quel est le rapport entre être semi-simple et être diagonalisable sur un surcorps ?

Question 2.76 (ID : 1151). — Redonner l'argument d'unicité pour la décomposition de Dunford lorsqu'elle existe (par exemple sur $\mathbb{C}$).

- On rappelle qu'un endomorphisme est dit semisimple ssi son polynôme minimal est sans facteur carré, ou encore ssi tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable. (Ceci est valable sur tout corps.) Montrer que sur un corps quelconque, une décomposition d'un endomorphisme en semisimple plus nilpotent qui commutent n'est pas forcément unique.

Question 2.77 (ID : 1176). Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Que est le lien logique entre les assertions suivantes ?

- A est diagonalisable sur $\mathbb{Q}$ / sur $\mathbb{C}$.
- Il existe / pour presque tout / pour tout p premier, $A \bmod p$ est diagonalisable sur $\mathbb{F}_p$ / sur $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Question 2.78 (ID : 1245). Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Soient A et B des matrices à coefficients dans K , semblables sur L . Montrer qu'elles sont semblables sur K . (Le cas général est difficile, distinguer des cas particuliers plus faciles : $K = \mathbb{R}$, corps infini...)

Question 2.79 (ID : 1486). $GL_n(k)$ est-il engendré par des matrices diagonalisables pour n'importe quel corps ?

Follow-up : traiter l'exemple de $GL_2\mathbb{F}_2$. Trouver une condition nécessaire pour que les diagonalisables puissent engendrer le groupe linéaire.

Question 2.80 (ID : 1570). Soit u un endomorphisme cyclique d'un ev de dimension finie. Déterminer tous les sous-espaces stables.

3 Algèbre linéaire, bilinéaire et euclidienne (43 questions)

Question 3.1 (ID : 1009). Conditions sur les coefficients d'une matrice symétrique 2×2 pour qu'elle soit définie positive (sans utiliser la diagonalisabilité). Preuve ?

Question 3.2 (ID : 1223). Donner une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

Question 3.3 (ID : 1228). En dimension réelle deux, qu'est-ce qu'un endomorphisme normal ?

Question 3.4 (ID : 1229). On donne une matrice symétrique réelle 2×2 . Quel est le moyen le plus simple de la diagonaliser ? De la diagonaliser en base orthonormée ?

Question 3.5 (ID : 1230). Dans un espace euclidien, quels sont les endomorphismes à la fois orthogonaux et symétriques ?

Question 3.6 (ID : 1231). Dans un espace euclidien, on considère un projecteur p . Montrer que la projection est orthogonale ssi le projecteur est symétrique.

Question 3.7 (ID : 1232). Construire une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que ses seules isométries linéaires soient $\pm \text{Id}$.

Question 3.8 (ID : 1235). Reconnaître sans calculs, de tête :

$$\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Question 3.9 (ID : 1236). Sans calculs, et si possible de tête (ou en faisant un dessin), identifier la nature géométrique de l'endomorphisme suivant de l'espace euclidien :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 3.10 (ID : 1238). Reconnaître (avec un peu de calculs mais pas trop)

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Attention au signe de l'angle.

Question 3.11 (ID : 1241). Qu'est-ce que le déterminant d'une forme quadratique??

Question 3.12 (ID : 1247). Spécialiser la décomposition polaire dans le cas des matrices de taille 1 (inversibles, ou non inversibles). En particulier, qu'est-ce qu'une matrice 1×1 unitaire? Hermitienne? Hermitienne (définie) positive?

Question 3.13 (ID : 1254). Pour une forme multilinéaire, être alternée est-il plus ou moins fort qu'être antisymétrique? Exemples?

Question 3.14 (ID : 1258). Dans $\mathbb{R}^3$ avec sa norme euclidienne, quelle est la distance entre $(1, 1, 1)$ et le plan affine passant par $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$? Le mieux serait qu'ici la réponse soit trouvée de tête, mais on peut toujours donner une variante avec d'autres points, et dans ce cas on demande le rapport avec les déterminants (et une réponse utilisant les déterminants).

Question 3.15 (ID : 1270). Idée de preuve du théorème spectral?

Question 3.16 (ID : 1271). Réduire telle forme quadratique (explicite). Quelle est la différence entre la méthode de Gauss et la diagonalisation en BON?

Question 3.17 (ID : 1412). Sur $M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|M\| := \sqrt{\sum_{i,j} |a_{ij}|^2}$ est une norme. On l'appelle la norme de Frobenius (ou de Hilbert-Schmidt). En donner une autre expression, plus compacte. Montrer que c'est une norme d'algèbre, autrement dit qu'elle est sous-multiplicative : $\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\|$. Est-ce une norme d'opérateur? (=norme subordonnée/triple)

Question 3.18 (ID : 1531). Citer quelques applications du théorème spectral.

Question 3.19 (ID : 1533). Montrer l'existence et l'unicité de l'adjoint.

Question 3.20 (ID : 1543). Que peut-on dire de la forme quadratique $xy + yz + zx$? (Rang, réduction etc.)

Question 3.21 (ID : 1752). Que dire d'une matrice orthogonale à coefficients entiers?

Question 3.22 (ID : 1804). Quelle est la façon standard de plonger $\mathbb{C}$ comme sous-anneau de $M_2(\mathbb{R})$? Applications?

Question 3.23 (ID : 1976). La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Déterminer une matrice A telle que $A^2 = M$.

Question 3.24 (ID : 2009). Soit E un espace euclidien. Déterminer les applications linéaires qui envoient toute base orthogonale sur une base orthogonale.

Question 3.25 (ID : 2034). Soient a et b des réels. Quelle est la décomposition polaire de $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$?

Question 3.26 (ID : 2036). Donner la nature géométrique des applications ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 3.27 (ID : 2037). On sait qu'une matrice orthogonale peut se décomposer comme produit de réflexions.

Exhiber de telles décompositions pour $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Question 3.28 (ID : 2044). Sans calculs (ou avec, en cas de blocage), reconnaître la nature géométrique des matrices suivantes.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Question 3.29 (ID : 2046). Reconnaître la (nature géométrique de la) matrice $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Question 3.30 (ID : 2115). Pouvez-vous me donner des exemples d'endomorphismes normaux, et le cas échéant, comment se passe leur réduction ?

Question 3.31 (ID : 2116). Que dire des valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal ?

Question 3.32 (ID : 2147). Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, comment détermine-t-on si une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est k -contractante ? Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 3/4 & 3/4 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$ sont-elles contractantes ?

★ ★ ★

Question 3.33 (ID : 1097). Un théorème affirme qu'une matrice définie positive admet une unique racine carrée définie positive. Rappeler l'idée de preuve puis trouver une matrice 2×2 qui admet une infinité de racines carrées.

Question 3.34 (ID : 1137). Quelle est la norme triple d'une matrice relativement à la norme $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$? Justifier.

Question 3.35 (ID : 1140). Maximum de la trace sur le groupe orthogonal ?

Question 3.36 (ID : 1246). Quelle est l'action de groupe dans la décomposition polaire ? Que dit la décomposition polaire en termes d'action de groupes, d'orbites, et de représentants privilégiés ?

Question 3.37 (ID : 1249). Unicité de la racine carrée d'une matrice hermitienne positive ? Sous-exo (cas particulier) : montrer qu'il existe une unique matrice hermitienne positive M telle que $M^2 = 3I$. Si l'on enlève la contrainte de positivité, combien de matrices hermitiennes vérifient $M^2 = 3I$? Et combien de matrices en toute généralité ?

Question 3.38 (ID : 1421). Quelle est la signature de la forme quadratique $A \mapsto \text{Tr}(A^2)$?

Question 3.39 (ID : 1526). Montrer que l'ensemble des matrices réelles symétriques positives est convexe, et que la fonction qui à une matrice associe sa plus grande valeur propre est convexe.

Question 3.40 (ID : 1532). Expliquer pourquoi on peut simultanément diagonaliser deux endomorphismes symétriques réels qui commutent.

Question 3.41 (ID : 1768). Les matrices de permutation signées sont les matrices ayant exactement un coefficient non nul par ligne et par colonne, ce coefficient étant égal à 1 ou -1 . Comment interpréter géométriquement l'ensemble de ces matrices ? Quelle est leur enveloppe convexe ?

Question 3.42 (ID : 1950). Donner un exemple explicite de matrice pour laquelle il n'y a pas unicité de la décomposition polaire.

Question 3.43 (ID : 1983). Soit $v \in \mathbb{Q}^3$ un vecteur unitaire pour la norme euclidienne. Est-ce la première colonne d'une matrice orthogonale ?

4 Algèbre linéaire : calcul fonctionnel (21 questions)

Question 4.1 (ID : 1380). Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis de $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Question 4.2 (ID : 1498). Étant donné un réel a , calculer l'exponentielle de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Question 4.3 (ID : 1801). Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 4.4 (ID : 1947). Sans diagonaliser explicitement, trouver une racine carrée de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, par exemple en utilisant un polynôme interpolateur.

Question 4.5 (ID : 1948). La matrice $M = \begin{pmatrix} -5 & 14 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ admet les valeurs propres 1 et 2, ce que l'on ne demande pas de vérifier.

Déterminer une racine carrée de M sans la diagonaliser explicitement, par exemple en utilisant un polynôme interpolateur.

Question 4.6 (ID : 1958). Montrer que l'exponentielle matricielle est bien définie, c'est-à-dire que la série de matrices converge bien.

Question 4.7 (ID : 2033). Soit A une matrice carrée. On sait que l'exponentielle de A est un polynôme en A . Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, exhiber un polynôme qui convient.

★ ★ ★

Question 4.8 (ID : 1106). Donner une matrice qui n'a pas de racine carrée. (Sur tout corps.)

Question 4.9 (ID : 1262). Si $S = \exp(T)$, que vaut T ? Est-il unique? Comment montrer l'existence?

Question 4.10 (ID : 1316). Trouver deux matrices A et B telles que

$$\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B)$$

Question 4.11 (ID : 1335). Montrer que l'exponentielle d'une matrice donnée A est un polynôme en A .

Ensuite : comment déterminer un tel polynôme? Est-ce utile?

Question 4.12 (ID : 1381). Que peut-on dire de l'exponentielle d'une matrice antisymétrique?

Question 4.13 (ID : 1495). Les matrices suivantes sont-elles des exponentielles de matrices complexes? Réelles? On demande une preuve constructive dans le cas affirmatif.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Question 4.14 (ID : 1496). Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ de trace nulle, et notons Δ son déterminant. Montrer que

$$\exp M = \begin{cases} \cosh \sqrt{-\Delta} I_2 + \frac{\sinh \sqrt{-\Delta}}{\sqrt{-\Delta}} M & \text{si } \Delta < 0 \\ \cos \sqrt{\Delta} I_2 + \frac{\sin \sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} M & \text{si } \Delta > 0 \end{cases}$$

Et si le déterminant est nul?

Question 4.15 (ID : 1683). Il est connu que l'exponentielle matricielle complexe est surjective (sur GL). Comment faire pour trouver un logarithme de $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$? (C'est-à-dire une matrice dont l'exponentielle vaut A ?) Et pour $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$?

Question 4.16 (ID : 1851). La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et possède donc des logarithmes complexes. Combien? Certains de ces logarithmes sont-ils réels?

Question 4.17 (ID : 1852). Trouver tous les logarithmes matriciels I_2 et $-I_2$. Approfondissement : que peut-on dire en dimension n ?

Question 4.18 (ID : 1887). Donner une matrice réelle inversible de taille ≥ 2 qui n'est pas l'exponentielle d'une matrice réelle.

Question 4.19 (ID : 1949). La matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ admet 1 comme valeurs propre double. Sans la réduire, exhiber une racine carrée de M , par exemple en utilisant un polynôme interpolateur.

★ ★ ★

Question 4.20 (ID : 1492). L'exponentielle est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$. Que peut-on dire sur $SL_n(\mathbb{C})$? Par exemple, est-ce que

$$\exp : \{M \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{Tr } M = 0\} \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$$

est surjective?

Question 4.21 (ID : 1497). À quelle condition sur $\lambda \in \mathbb{R}^*$ la matrice $M = \text{diag}(\lambda, \lambda^{-1}) \in SL_2(\mathbb{R})$ est-elle l'exponentielle d'une matrice réelle de trace nulle?

5 Algèbre : anneaux (33 questions)

Question 5.1 (ID : 1062). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair.

Expliquer en quoi ce problème est « le même » que celui de montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1 + i)^n + (1 - i)^n \in \mathbb{R}$. Autres exemples?

Question 5.2 (ID : 1924). Combien d'éléments nilpotents y a-t-il dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

★ ★ ★

Question 5.3 (ID : 1029). Soit $\phi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. L'image réciproque d'un idéal premier est-elle un idéal premier? L'image réciproque d'un idéal maximal est-elle un idéal maximal? Expliquer/illustrer.

Question 5.4 (ID : 1063). Donner plusieurs exemples d'anneaux :

1. non intègres;
 2. intègres mais non factoriels;
 3. factoriels non principaux.
- (Bonus : principaux non euclidiens.)

Question 5.5 (ID : 1064). Montrer que si A est un anneau, alors $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Question 5.6 (ID : 1065). Démontrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal autrement qu'en trouvant un idéal non principal, ou qu'en utilisant la CNS de principalité des anneaux $A[X]$. (Penser aux idéaux premiers/maximaux.)

Question 5.7 (ID : 1069). Montrer qu'un idéal non trivial de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est premier ssi il est maximal.

Question 5.8 (ID : 1070). Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ n'est pas factoriel. De même pour $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$. (Attention ce dernier anneau n'est *pas* l'anneau des entiers d'Eisenstein, qui lui est euclidien.)

Question 5.9 (ID : 1071). Montrer que l'anneau des décimaux est principal. Montrer que $k[X][(X-2)^{-1}]$, l'anneau des fractions rationnelles dont le dénominateur est une puissance de $X-2$, est principal.

Question 5.10 (ID : 1072). Montrer qu'un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ est principal.

Question 5.11 (ID : 1074). Dans l'anneau des nombres décimaux, trouver un générateur de l'idéal engendré par 21 et 1, 4.

Quel est «le» pgcd de 0, 6 et 34, 8 dans les décimaux ?

Question 5.12 (ID : 1075). Dans $\mathbb{Z}[i]$, quel est «le» pgcd de $1+3i$ et de $2i$?

Question 5.13 (ID : 1093). Quel est le groupe des unités de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$? Et de l'anneau des entiers d'Eisenstein $\mathbb{Z}[(-1+i\sqrt{3})/2]$?

Question 5.14 (ID : 1110). Les anneaux $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}[X]/(X^2)$ sont-ils isomorphes ?

Question 5.15 (ID : 1197). On considère l'équation $x^2 - 8y^2 = 1$, sur $\mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{8}]$ n'est pas factoriel.
2. Trouver rapidement une, puis une infinité de solutions à l'équation.
3. Le faire à un niveau terminale S spé maths (indice : ils n'ont pas d'anneaux en général, mais ils ont les matrices 2×2).
4. (Plus dur) Savez-vous s'il y a d'autres solutions entières ?
5. Illustrer les solutions réelles (tracé à la main, avec petits calculs à faire)
6. Variation : décrire et paramétrer les solutions rationnelles.

Question 5.16 (ID : 1198). Montrer que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont exactement les $(\pm 1 \pm \sqrt{2})^n$, avec $n \in \mathbb{N}$. Dessiner ces éléments.

Question 5.17 (ID : 1200). Généraliser le petit théorème de Fermat à un anneau plus général que $\mathbb{Z}$, par exemple $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Quel est l'énoncé ? La preuve ?

Question 5.18 (ID : 1201). Si A est un anneau (commutatif unitaire), on considère

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in A \right\}$$

Montrer que c'est un anneau. Si $A = \mathbb{Z}$, à quoi cet anneau est-il isomorphe (écrire l'isomorphisme) ? Et si $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Et en remplaçant 3 par un $d \in \mathbb{Z}$ en général ? Écrire les isomorphismes. À quoi correspond le déterminant et la trace de ces matrices, dans ces anneaux ?

Question 5.19 (ID : 1202). Quelques sont les éléments premiers / irréductibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$? Et de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ en général ?

Question 5.20 (ID : 1286). Soit p un premier. Donner quatre anneaux de cardinal p^2 deux à deux non isomorphes. (Plus dur : montrer qu'il n'y en a pas d'autres, à isomorphisme près.)

Question 5.21 (ID : 1481). On fixe ξ un complexe. Sur $\mathbb{C}$, on définit une nouvelle loi

$$z \star w = zw + \xi \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)$$

Montrer que $(\mathbb{C}, +, \star)$ est un anneau commutatif, dont $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un sous-anneau. On le note $\mathbb{C}_\xi$. Déterminer si et quand $\mathbb{C}_\xi$ est un corps, et si, dans ce cas, il est isomorphe à $\mathbb{C}$.

Question 5.22 (ID : 1509). On munit $\mathbb{R}^2$ d'une multiplication $\star$ qui en fait une $\mathbb{R}$ -algèbre. Est-ce que cette $\mathbb{R}$ -algèbre est obligatoirement isomorphe à $\mathbb{C}$? Quelles sont les autres possibilités ? Donner des exemples.

Question 5.23 (ID : 1514). On considère l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, et on quotiente par l'idéal (2) . À quoi le quotient est-il isomorphe ?

Question 5.24 (ID : 1515). Combien de structures d'anneau différentes peut-on mettre sur le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Sur un groupe abélien fixé, y a-t-il plusieurs structures d'anneau compatibles ?

Question 5.25 (ID : 1651). Soit ϕ un morphisme d'anneaux. montrer que l'image d'un idéal n'est pas forcément un idéal.

Question 5.26 (ID : 1729). Montrer que euclidien implique principal.

Question 5.27 (ID : 1921). L'anneau des décimaux est-il euclidien ? Expliquer/illustrer.

Question 5.28 (ID : 1922). À quoi ressemble le groupe des inversibles de l'anneau des décimaux ?

Question 5.29 (ID : 1925). Combien d'éléments idempotents y a-t-il dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

Question 5.30 (ID : 1970). Que voulez-vous dire par « unique structure d'anneau sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ » ?

Question 5.31 (ID : 1971). Combien y a-t-il de solutions de $x^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$?

★ ★ ★

Question 5.32 (ID : 1068). Que savez-vous de la question suivante : pour quels $d \in \mathbb{Z}$ l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ est-il principal ? factoriel ? euclidien ?

Question 5.33 (ID : 1095). Soit $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres entiers et $x \in \mathbb{Q}$ tel que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0.$$

Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.

Quelle propriété de $\mathbb{Z}$ utilise-t-on ? Comment généraliser ce résultat à d'autres anneaux que $\mathbb{Z}$?

6 Algèbre : groupes (102 questions)

Question 6.1 (ID : 1035). Preuve rapide et élémentaire du fait que S_n n'est pas abélien (pour quels n ?)

Question 6.2 (ID : 1036). Calculer rapidement le cardinal du groupe alterné A_n . Donner plusieurs définitions équivalentes de la signature.

Question 6.3 (ID : 1038). Calculer la signature d'une permutation explicite. Comparer la vitesse des différentes méthodes possibles.

Question 6.4 (ID : 1044). Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, quels sont les ordres des éléments, et combien d'éléments de chaque ordre y a-t-il ? Quels sous-groupes engendrent-ils ? Combien y a-t-il de sous-groupes ?

Question 6.5 (ID : 1045). Dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, quel est l'ensemble des éléments de n -torsion ? Quel est son cardinal ? Détailler plusieurs exemples.

Question 6.6 (ID : 1046). Expliquer comment écrire une permutation comme produit de transpositions, puis comme produit de transpositions du type $(i \ i+1)$, de deux manières :

1. à l'aide du dessin où on relie les entiers à leur image,
2. en suivant la preuve abstraite (par récurrence), qui fournit un algorithme.

Question 6.7 (ID : 1188). Écrire un isomorphisme explicite entre $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$ et $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times)$. En fait, écrire tous les isomorphismes possibles.

Question 6.8 (ID : 1426). Combien d'automorphismes le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède-t-il ? À quoi est isomorphe $\text{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$?

Question 6.9 (ID : 1457). Combien y a-t-il de groupes abéliens d'ordre 8 distincts, à isomorphisme près ? Et d'ordre 12 ? 36 ?

Question 6.10 (ID : 1470). Combien y a-t-il de morphismes entre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$?

Question 6.11 (ID : 1472). On considère deux entiers m et n et le morphisme

$$f : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, x \mapsto nx$$

Calculer le noyau et l'image de f . (En particulier, leur cardinal.)

Question 6.12 (ID : 1510). Que dit le théorème de structure des groupes abéliens finis pour $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Et pour $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

Question 6.13 (ID : 1511). Combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal 24 ? Et 72 ? (À isomorphisme près bien sûr.)

Question 6.14 (ID : 1705). Donner un exemple de nombre complexe de module 1 qui n'est pas une racine de l'unité.

Question 6.15 (ID : 1727). Les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont-ils isomorphes ?

★ ★ ★

Question 6.16 (ID : 1000). Que peut-on dire des sous-groupes de $\mathbb{U}$? Existe-t-il des sous-groupes infinis mais non denses dans $\mathbb{U}$?

Question 6.17 (ID : 1005). Montrer que si p est le plus petit facteur premier de $|G|$, et H est d'indice p dans G , alors H est distingué dans G .

Question 6.18 (ID : 1006). Mettre en évidence sur un exemple explicite le fait que si H n'est pas distingué dans G , le quotient ensembliste ne peut pas être muni de structure de groupe compatible avec la surjection canonique. Prendre l'exemple « le plus petit possible ».

Question 6.19 (ID : 1007). Existe-t-il des groupes (finis) non abéliens, mais dont tous les sous-groupes sont quand même distingués ?

Question 6.20 (ID : 1008). Donner des exemples simples de groupes dérivés. Quel est le groupe dérivé de Q_8 (quaternions), par exemple ?

Question 6.21 (ID : 1017). Un sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps commutatif est cyclique. Et pour un corps non commutatif ?

Question 6.22 (ID : 1018). Pour quels k le groupe alterné A_n est-il k -transitif ?

Question 6.23 (ID : 1020). Décrire tous les sous-groupes de Sylow de S_3 et S_4 . En particulier, décrire avec soin les 2-Sylow de S_4 : liste des éléments, groupe classique auquel ils sont isomorphes, et interprétation géométrique.

Question 6.24 (ID : 1021). Décrire géométriquement tous les éléments de S_4 , d'abord vu comme groupe des isométries d'un tétraèdre, puis vu comme le groupe des rotations du cube.

Question 6.25 (ID : 1024). Quel est le cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$, de $SL_n(\mathbb{F}_q)$, de $PGL_n(\mathbb{F}_q)$ et enfin de $PSL_n(\mathbb{F}_q)$?

Question 6.26 (ID : 1026). Soit ϕ un morphisme de $\mathfrak{S}_n$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Que dire de ϕ ?

Question 6.27 (ID : 1030). Il existe une notion plus forte que celle de sous-groupe distingué : celle de sous-groupe caractéristique (stabilité sous tout automorphisme, pas seulement les automorphismes intérieurs). Montrer que le centre et le groupe dérivé sont des sous-groupes caractéristiques.

Question 6.28 (ID : 1031). Pour chaque polygone et polyèdre régulier, le groupe des isométries directes est à chaque fois d'indice deux dans le groupe des isométries. Est-ce qu'on a un produit semi-direct ? Un produit direct ?

Question 6.29 (ID : 1032). Montrer qu'un sous-groupe ou un quotient d'un groupe résoluble est résoluble. Montrer réciproquement que si l'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$$

et que N et Q sont résolubles, alors G aussi. (Reformulation : une extension de groupes résolubles est résoluble.)

Question 6.30 (ID : 1033). Quel est le cardinal de la classe de conjugaison de $(12)(34)$ dans $\mathfrak{A}_5$?

Question 6.31 (ID : 1034). À propos du théorème de Cayley : quelle en est une preuve, ou une idée de preuve ? À quoi sert ce théorème en pratique ?

Question 6.32 (ID : 1037). Expliquer, si possible de plusieurs manières, pourquoi la signature est le seul morphisme non trivial de S_n dans $\mathbb{C}^*$.

Question 6.33 (ID : 1041). Déterminer les groupes d'automorphismes de $C_2 \times C_4$ et de $C_2 \times C_6$.

Question 6.34 (ID : 1043). Décrire $O(2)$ et $SO(2)$ (composantes connexes, forme paramétrée). Pareil pour $O(1, 1)$. De façon générale, combien de composantes connexes a le groupe $O(p, q)$? Et $SO(p, q)$?

Question 6.35 (ID : 1047). Prouver qu'un sous-groupe fini multiplicatif d'un corps (par convention commutatif) est cyclique à l'aide du théorème de structure des groupes abéliens finis.

Question 6.36 (ID : 1051). Quel est le cardinal de $GL_2(\mathbb{F}_2)$? À quoi est isomorphe ce groupe ?

Follow-up : connaissez-vous d'autres tels isomorphismes, ou plus généralement de morphismes de groupes linéaires vers des groupes symétriques ?

Question 6.37 (ID : 1060). Exemples de groupes infinis avec un système de générateurs ? De groupes infinis avec un système fini de générateurs (à part $\mathbb{Z}$) ?

Question 6.38 (ID : 1084). Soit G un groupe fini d'ordre n . Si k est un diviseur de n , existe-t-il un sous-groupe $H < G$ d'ordre k ? Que dire sur cette question ?

Question 6.39 (ID : 1143). Écrire explicitement un isomorphisme entre le groupe symétrique S_3 et $GL_2(\mathbb{F}_2)$, en précisant l'image de tous les éléments.

Question 6.40 (ID : 1154). Dans un groupe fini, les théorèmes de Sylow affirment entre autres que tous les p -Sylow sont conjugués. Trouver un exemple de groupe G avec deux sous-groupes H et H' de même cardinal et non conjugués.

Question 6.41 (ID : 1168). Vrai ou faux ? Si N est un sous-groupe distingué d'un groupe fini G , de quotient Q , alors G est un produit semi-direct de N par Q .

Question 6.42 (ID : 1172). Vrai ou faux ? « Un sous-groupe d'un sous-groupe normal de G est normal dans G . »

Question 6.43 (ID : 1173). Vrai ou faux ? « Un sous-groupe normal d'un sous-groupe normal de G est normal dans G . »

Question 6.44 (ID : 1191). Soit G un groupe fini, agissant sur un ensemble fini X de cardinal $n \geq 2$. Montrer que si l'action est 2-transitive, alors G est d'ordre pair.

Question 6.45 (ID : 1321). Le groupe symétrique est-il un produit semi-direct de $\mathfrak{A}_n$ par $\{\pm 1\}$?

Question 6.46 (ID : 1322). Soit k un corps, et G l'ensemble des applications de k vers k de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $(a, b) \in k^\times \times k$. Montrer que G est un groupe : quel est le nom de ce groupe ? L'écrire comme un produit semi-direct de deux groupes simples.

Lorsque $k = \mathbb{F}_3$, à quoi est isomorphe ce groupe ? Écrire un isomorphisme.

Question 6.47 (ID : 1453). On sait que A_n est simple pour $n \geq 5$, mais que se passe-t-il pour $n \leq 4$? Décrire ces groupes le plus complètement possible : cardinal, isomorphisme avec d'autres groupes connus, treillis des sous-groupes etc.

Question 6.48 (ID : 1454). Sur le produit semi-direct : donner un exemple de produit semi-direct qui ne soit pas un groupe diédral.

Question 6.49 (ID : 1455). Sur le produit semi-direct : le groupe $GL_n(k)$ est-il produit semi-direct de $SL_n(k)$ et de $k^\times$? Et produit direct ?

Question 6.50 (ID : 1458). Montrer que le groupe des automorphismes du groupe de Klein $V_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Question 6.51 (ID : 1467). Le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède un sous-groupe distingué d'ordre quatre : le groupe des bitranspositions. Il est distingué dans $\mathfrak{S}_4$. À quel groupe connu est isomorphe le quotient ? L'extension est-elle un produit semi-direct ? Un produit direct ?

Question 6.52 (ID : 1468). Le groupe des isométries d'un cube possède-t-il des sous-groupes d'ordre huit isomorphes à D_4 ? Combien ? Sont-ils distingués ? Conjugués ?

Question 6.53 (ID : 1475). Lorsque l'on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe d'isométries du tétraèdre régulier, à quelle isométrie correspond la bitransposition (12)(34) ?

Et si on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe de rotations du cube ?

Question 6.54 (ID : 1477). Lorsque l'on voit $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe d'isométries du tétraèdre régulier, à quelle isométrie correspond le 4-cycle (1234) ?

Question 6.55 (ID : 1478). Soient p et q premiers entre eux, et $n = pq$. Que penser de la phrase suivante :

« Par le théorème chinois, on a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, et donc $\text{Aut } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \text{Aut } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \text{Aut } \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. »

La conclusion est-elle vraie ? Le raisonnement ?

Question 6.56 (ID : 1507). Soit p un premier et $r \geq 1$. Le groupe $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?

Question 6.57 (ID : 1528). Un groupe abélien libre n'a pas de torsion. La réciproque est-elle vraie ?

Question 6.58 (ID : 1529). On considère le groupe μ_∞ de toutes les racines de l'unité (dans $\mathbb{C}$), avec loi multiplicative. Ce groupe est-il isomorphe à quelque chose de connu ? Comment peut-on le décrire ?

Question 6.59 (ID : 1548). À propos de l'exposant d'un groupe. Si G est un groupe abélien d'exposant n , on sait qu'il existe un élément d'ordre n . Démontrer ce résultat. Est-ce vrai pour un groupe non abélien (fini) ?

Question 6.60 (ID : 1549). Trouver tous les groupes finis sans automorphismes non triviaux.

Question 6.61 (ID : 1596). Dans le groupe symétrique S_n , que peut-on dire de deux éléments conjugués ? (Preuve ?)

Question 6.62 (ID : 1597). Soient g et h deux éléments conjugués du groupe symétrique S_n . S'ils appartiennent au groupe alterné A_n , sont-ils conjugués dans A_n ?

Question 6.63 (ID : 1606). Soit G un groupe infini et H un sous-groupe strict. Montrer que $G \setminus H$ n'est pas fini.

Question 6.64 (ID : 1650). Soit G un groupe, H et K des sous-groupes distingués de G . Si $H \simeq K$, est-ce que $G/H \simeq G/K$?

Question 6.65 (ID : 1652). Connaissez-vous des exemples de groupes qui possèdent des automorphismes non intérieurs ?

Donner un exemple de groupe et d'automorphisme, un exemple explicite (donc pas forcément celui auquel vous étiez en train de penser).

Question 6.66 (ID : 1653). Donner un exemple de sous-groupe distingué mais non caractéristique (stable sous tout automorphisme).

Question 6.67 (ID : 1657). Connaissez-vous un groupe isomorphe à son groupe d'automorphismes ?

Question 6.68 (ID : 1670). Montrer qu'un groupe abélien fini est cyclique si et seulement si tous ses groupes de n -torsion sont cycliques.

Et si le groupe est infini ?

Question 6.69 (ID : 1789). Faire la liste de toutes les rotations du tétraèdre régulier, en précisant les axes et angles. Décrire un isomorphisme avec A_4 , en disant quelle permutation correspond à quelle isométrie.

Question 6.70 (ID : 1790). Faire la liste de toutes les rotations du cube, en précisant les axes et angles. Décrire un isomorphisme avec S_4 , en disant quelle permutation correspond à quelle isométrie.

Question 6.71 (ID : 1927). Soit G un groupe fini. Montrer que tout morphisme de $\mathbb{Q}$ dans G est trivial.

Question 6.72 (ID : 1961). Soit k un corps. Les groupes $(k, +)$ et $(k^*, \times)$ sont-ils (toujours, parfois, jamais) isomorphes ?

Question 6.73 (ID : 1973). Les 3-cycles sont-ils distingués dans A_4 ?

Question 6.74 (ID : 1974). Les 5-cycles sont-ils distingués dans A_5 ?

Question 6.75 (ID : 2013). Donner un exemple de p -groupe non abélien.

Question 6.76 (ID : 2045). Donner des exemples de matrices de $SO(2)$ à coefficients entiers, ou rationnels. Existe-il une infinité de telles matrices ?

Question 6.77 (ID : 2050). Donner un exemple de matrice $M \in M_2(\mathbb{Z})$ d'ordre 4, puis d'ordre 3 et 6.

Si une matrice $M \in M_2(\mathbb{Z})$ est d'ordre fini, que peut-on dire de son ordre ?

Question 6.78 (ID : 2087). Soit G un groupe infini. On suppose qu'il possède un sous-groupe d'indice fini. Montrer qu'il n'est pas simple.

★ ★ ★

Question 6.79 (ID : 1001). Déterminer tous les morphismes continus de $\mathbb{U}$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. L'image est-elle un sous-groupe distingué ?

Question 6.80 (ID : 1014). Quels sont les groupes simples (non abéliens) que vous connaissez ?
Quel est le plus petit ?

Question 6.81 (ID : 1019). Trouver un ensemble à six éléments sur lequel agit naturellement S_5 . À quoi ça sert ?

Question 6.82 (ID : 1027). Soit ϕ un morphisme de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ vers $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Que dire de ϕ ?

Question 6.83 (ID : 1042). Si $k = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$, que sont les groupes $SL_2(k)$, $D(GL_2(k))$ et $D(SL_2(k))$? Que dire de la simplicité de $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ lorsque $n = 2$ et $q \leq 3$?

Question 6.84 (ID : 1048). Quelles applications pour le théorème de Burnside sur les groupes linéaires d'exposant fini ? À quoi sert ce théorème et dans quel contexte le placer ? Est-il vrai pour $\mathbb{R}$ au lieu de $\mathbb{C}$? Que peut-on dire de simple en caractéristique positive ? (Donner des exemples de corps infinis de caractéristique p .)

Question 6.85 (ID : 1049). Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, dont tous les éléments sont d'ordre fini. Est-il forcément fini ?

Question 6.86 (ID : 1086). On sait que tout groupe fini peut se plonger dans un groupe symétrique S_n . Que dire pour un groupe infini ?

Est-il vrai que tout groupe peut se plonger dans un groupe linéaire $GL_n(K)$, pour un corps K et un entier n adéquat ?

Question 6.87 (ID : 1107). Pour quels k et q le groupe $GL_2(\mathbb{F}_q)$ possède-t-il un sous-groupe isomorphe au groupe cyclique $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$?

(Plus difficile mais intéressant :) Même question avec le groupe diédral d'ordre $2k$ au lieu du groupe cyclique $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Question 6.88 (ID : 1181). William Burnside a démontré en 1905 qu'un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est forcément fini. Montrer qu'un sous-groupe d'exposant fini de $O_n(\mathbb{R})$ est également fini. Connaissez-vous d'autres groupes pour lesquels un résultat de ce type est vrai ?

Question 6.89 (ID : 1182). William Burnside a démontré en 1905 qu'un sous-groupe d'exposant fini de $GL_n(\mathbb{C})$ est forcément fini. En étudiant la preuve, montrer que de plus, on a une estimation sur l'ordre du groupe : si l'exposant est N , alors l'ordre est $\leq N^{n^3}$.

Question 6.90 (ID : 1227). Le groupe $SO(3)$ est simple mais que dire de $SO(4)$? De $SO(n)$ en général ?

Question 6.91 (ID : 1274). Sur $\mathbb{R}$, il est connu que $SO(2)$ est en bijection avec $\mathbb{S}^1$. Rappeler pourquoi. Sur $\mathbb{F}_q$ avec q impair, est-il vrai que $SO(2, \mathbb{F}_q)$ est en bijection avec $\mathbb{S}^1(\mathbb{F}_q) := \{(a, b) \in \mathbb{F}_q^2 \mid a^2 + b^2 = 1\}$? Combien d'éléments possède ce « cercle unité » ?

Question 6.92 (ID : 1275). Montrer que $SO(2, \mathbb{F}_q)$ est cyclique si q est impair, et que dans ce cas, $O(2, \mathbb{F}_q)$ est isomorphe à un groupe diédral.

Question 6.93 (ID : 1281). Que dire de l'application de réduction modulo p des coefficients $SL_n(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_n(\mathbb{F}_p)$? Est-elle surjective ? Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_5)$ a-t-elle des antécédents ?

Question 6.94 (ID : 1363). Donner des exemples de groupes parfaits (égaux à leur groupe dérivé) de cardinal fini et infini.

Question 6.95 (ID : 1535). Soit μ_∞ le groupe des racines complexes de l'unité (toutes les racines de l'unité dans $\mathbb{C}$). Peut-on décrire les endomorphismes de ce groupe ?

Question 6.96 (ID : 1568). Donner des exemples de morphismes de groupe de $\mathbb{C}^*$ vers lui-même, continus et discontinus.

Question 6.97 (ID : 1598). Quels sont les sous-groupes distingués de $GL(n, K)$? (Question difficile. Commencer par citer des sous-groupes distingués, disons quatre lorsque $K = \mathbb{R}$.)

Question 6.98 (ID : 1608). Connaissez-vous beaucoup de sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$? Tous les sous-groupes de $(\mathbb{Q}, +)$?

Question 6.99 (ID : 1659). Vous entendez quelqu'un affirmer que « tout ensemble non vide est un groupe ». Au lieu de chouiner (« ça veut rien dire »), expliquer ce qu'il a vraiment voulu dire, et pourquoi c'est vrai et non trivial.

Question 6.100 (ID : 2051). Montrer que $GL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 6.101 (ID : 2128). Expliquez pourquoi $\mathfrak{S}_4$ est intéressant, pourquoi $\mathfrak{S}_5$ est magnifique, pourquoi $\mathfrak{S}_6$ est une exception.

Que diriez-vous de $\mathfrak{S}_7$?

Question 6.102 (ID : 2130). À quoi ça « sert », que $\mathfrak{S}_6$ ait des automorphismes non intérieurs ? Connaissez-vous d'autres groupes qui ont des automorphismes extérieurs, ou bien des groupes dont tous les automorphismes sont intérieurs ? Diriez-vous qu'il y a une situation plus commune que l'autre ?

7 Algèbre : polynômes et corps (106 questions)

Question 7.1 (ID : 1185). Soit $n > 0$ et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer la somme

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$$

Question 7.2 (ID : 1186). Montrer que

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_7} \frac{1}{2 - \omega} = \frac{448}{127}$$

Question 7.3 (ID : 1211). Dans $k[X]$, est-ce que être irréductible est équivalent à ne pas avoir de racines ?

- Question 7.4** (ID : 1214).
1. Décomposer $X^5 - 1$ sur $\mathbb{R}$.
 2. Montrer que $X^3 + 2X^2 + X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
 3. Étudier l'irréductibilité de $X^4 - X^2 + 1$ et de $X^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$.

Question 7.5 (ID : 1216). Quel est le pgcd de $X^n - 1$ et $X^m - 1$?

Question 7.6 (ID : 1459). On considère α, β et γ les racines complexes de $X^3 + 2X^2 + 3X + 4$. Calculer $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

Question 7.7 (ID : 1581). À quoi sert la décomposition en éléments simples, à part calculer des primitives ?

Question 7.8 (ID : 1741). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples. Montrer que P' l'est également, puis que P ne peut avoir deux coefficients consécutifs nuls.

Question 7.9 (ID : 1754). Montrer qu'un polynôme réel de la forme $X^n + aX + b$ ne peut avoir au plus que trois racines réelles distinctes.

Question 7.10 (ID : 1755). Montrer que les racines complexes d'un polynôme unitaire $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ sont de module inférieur à $\max \left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right)$.

Question 7.11 (ID : 1997). Soient a et b les racines de $X^2 + 177X + 111$.

1. Obtenir $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ sans calculs.
2. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $Q(X) := P(X - a)P(X - b)$ est à coefficients rationnels.

★ ★ ★

Question 7.12 (ID : 1015). Est-ce que $\mathbb{F}_4$ est inclus dans $\mathbb{F}_8$?

Question 7.13 (ID : 1016). Soit A une matrice carrée entière, et p un premier. Montrer que $Tr(A^p) \equiv Tr(A) \pmod{p}$.

Question 7.14 (ID : 1022). Résoudre $x^2 + 2x + 2 = 0$ et $x^2 + 2x + 3 = 0$ sur $\mathbb{F}_5$. La méthode avec le discriminant est-elle valable sur un corps fini ?

Question 7.15 (ID : 1023). Combien y a-t-il de racines n -èmes de l'unité dans $\mathbb{F}_q$?

Question 7.16 (ID : 1088). Donner un exemple de corps de caractéristique p infini, qui ne soit pas $\overline{\mathbb{F}_p}$. Donner également des exemples de corps de caractéristique p algébriquement clos différents de $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Question 7.17 (ID : 1101). Le théorème des deux carrés (énoncé par Fermat, prouvé par Lagrange) décrit les nombres entiers qui sont des sommes de deux carrés.

Par contre, dans $\mathbb{F}_p$, tout élément est une somme de deux carrés. Démontrer ce résultat. Est-ce vrai dans un corps fini en général ? (Rappeler également l'énoncé du théorème des deux carrés pour $\mathbb{Z}$.)

Question 7.18 (ID : 1103). Quel est le pgcd de $X^6 + 7$ et $X^5 + 3X + 1$ dans $\mathbb{F}_{11}[X]$?

Question 7.19 (ID : 1108). Combien y a-t-il de puissances n -èmes dans $\mathbb{F}_q$?

Application : combien y a-t-il de cubes dans $\mathbb{F}_5$? Dans $\mathbb{F}_7$?

Question 7.20 (ID : 1109). Les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sont-ils isomorphes ?

Question 7.21 (ID : 1148). Quelles sont les hypothèses minimales à faire sur un corps k pour que les énoncés suivants, portant sur $P \in k[X]$, soient vrais ?

1. Racines : $(X - \alpha) \mid P \iff P(\alpha) = 0$.

2. Racines simples :

$$((X - \alpha) \mid P \text{ et } (X - \alpha)^2 \nmid P) \iff (P(\alpha) = 0 \text{ et } P'(\alpha) \neq 0)$$

3. Racines multiples :

$$((X - \alpha)^2 \mid P) \iff (P(\alpha) = P'(\alpha) = 0)$$

4. Existence de racines multiples :

$$(\exists \alpha \in k, : (X - \alpha)^2 \mid P) \iff (\text{pgcd}(P, P') \neq 1)$$

5. Racines doubles :

$$((X - \alpha)^2 \mid P \text{ et } (X - \alpha)^3 \nmid P) \iff (P(\alpha) = P'(\alpha) = 0 \text{ et } P''(\alpha) \neq 0)$$

6. Racines d'ordre m :

$$((X - \alpha)^m \mid P \text{ et } (X - \alpha)^{m+1} \nmid P) \iff (P(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0)$$

Question 7.22 (ID : 1156). 1. Si x et y sont des nombres algébriques, montrer que xy et $x + y$ le sont également.

2. Soit x un nombre algébrique, annulé par un polynôme P . Montrer que ix est algébrique en trouvant un polynôme **explicite** qui l'annule.

3. Ce qui précède reste-t-il vrai avec des entiers algébriques à la place de nombres algébriques ?

Question 7.23 (ID : 1175). Soit $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists P \in \mathbb{Q}[X], P(z) = 0\}$ l'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{Q}$. Montrer que A est un corps, et qu'il est algébriquement clos (autrement dit qu'il contient aussi toutes les racines de tous les polynômes de $A[X]$).

Redémontrer ensuite ces résultats mais sans techniques vectorielles.

Question 7.24 (ID : 1178). Quel est l'ensemble des nombres premiers p tels que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ne soit pas trigonalisable dans $\mathbb{F}_p$?

Question 7.25 (ID : 1183). Écrire le cosinus et le sinus de $2\pi/5$ à l'aide de radicaux. Ensuite, écrire les cosinus et sinus de tous les angles multiples de $\pi/5$. Finalement, construire un pentagone régulier à la règle et au compas.

(Attention, ce n'est pas parce qu'un nombre est exprimable à l'aide de radicaux qu'il est constructible !)

Question 7.26 (ID : 1192). Montrer qu'une fonction de $\mathbb{F}_p$ dans $\mathbb{F}_p$ est... une fonction polynomiale ! (D'un degré que l'on peut majorer a priori.)

Question 7.27 (ID : 1203). Combien d'éléments inversibles possède l'anneau $\mathbb{F}_p[X]/(X^2 - 3)$?

Question 7.28 (ID : 1204). Est-ce que $\mathbb{Z}[i]/(p)$ est le corps $\mathbb{F}_{p^2}$? Quels corps finis peuvent être réalisés comme des quotients de $\mathbb{Z}[i]$?

Question 7.29 (ID : 1212). Donner les quatre premiers polynômes cyclotomiques. Montrer que $X^n - 1$ est bien le produit des cyclotomiques.

Question 7.30 (ID : 1213). Peut-il y avoir un nombre fini d'irréductibles dans un anneau du type $k[X]$?

Question 7.31 (ID : 1215). Factoriser $X^4 + 2X^3 + X + 2$ sur $\mathbb{F}_3$.

Question 7.32 (ID : 1217). Déterminer le polynôme minimal de $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, de $\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ et de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbb{Q}$.

Question 7.33 (ID : 1218). Décomposer $X^7 - 1$ en irréductibles sur $\mathbb{F}_2$.

Question 7.34 (ID : 1219). Montrer que l'élevation à la puissance p dans un anneau de caractéristique p est un morphisme d'anneaux.

Donner un exemple.

Question 7.35 (ID : 1276). Sur $\mathbb{R}$, on a une bijection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus (-1, 0)$ donnée par $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$. Rappeler comment voir géométriquement ce paramétrage, qui a l'avantage de se restreindre en une bijection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{S}^1(\mathbb{Q}) \setminus (-1, 0)$, l'ensemble des points du cercle (privé d'un point) à coordonnées rationnelles. On se place maintenant sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Que peut-on dire ?

Question 7.36 (ID : 1277). Si q est une puissance d'un premier impair, on considère

$$\theta : \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{F}_q^\times, x \mapsto x^{(q-1)/2}.$$

Montrer $\text{Im } \theta = \{\pm 1\}$ et que le noyau est l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_q^\times$.

Que se passe-t-il si $q = 2^k$?

Question 7.37 (ID : 1279). Soit q une puissance d'un premier impair. Combien de racines huitièmes de l'unité y a-t-il dans $k = \mathbb{F}_q$? Donner le résultat en fonction d'une classe de congruence de q . À quelle condition y a-t-il les huit racines huitièmes ? Montrer qu'un corps du type $\mathbb{F}_{q^2}$ contient toujours huit racines huitièmes.

Question 7.38 (ID : 1280). Montrer que $1 + X^2$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$. En déduire une description de $\mathbb{F}_9$. Ce corps possède-t-il des racines primitives huitièmes de l'unité et quelles sont-elles dans la description donnée ?

Question 7.39 (ID : 1282). Montrer que $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, mais réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout p .

Question 7.40 (ID : 1283). Donner cinq polynômes unitaires irréductibles sur $\mathbb{Q}$. (De degré > 1 . Si possible, avec des degrés distincts.)

Question 7.41 (ID : 1284). Sur $\mathbb{F}_2$, combien de polynômes unitaires irréductibles de degré quatre y a-t-il ? Et primitifs ?

Question 7.42 (ID : 1285). Soit p un premier. Donner des exemples de polynômes :

1. irréductibles sur $\mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{F}_p$;
2. irréductibles sur $\mathbb{F}_p$ mais pas sur $\mathbb{Z}$;
3. irréductibles sur $\mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{Q}$;
4. irréductibles sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{Z}$.

Question 7.43 (ID : 1288). Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme irréductible. Montrer qu'il n'a pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$ par un corps k et sa clôture algébrique $\bar{k}$?

Question 7.44 (ID : 1289). L'équation $x^2 + 15x + 21 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{F}_{97}$?

Question 7.45 (ID : 1290). Sur quels $\mathbb{F}_p$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

La diagonaliser dans $\mathbb{F}_5$, puis dans $\mathbb{F}_9$ (expliquer pourquoi c'est possible).

Construire explicitement $\mathbb{F}_9$ et faire tous les calculs : valeurs propres, espaces propres, inverses des matrices de passage etc.

Question 7.46 (ID : 1291). L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{F}_5$ et si oui lesquelles ? Même question avec $\mathbb{F}_7$.

Question 7.47 (ID : 1293). Sur $\mathbb{F}_2$, combien de polynômes unitaires irréductibles de degré six y a-t-il ? On pourra considérer les sous-corps de $\mathbb{F}_{64}$: sont-ils inclus les uns dans les autres ?

Question 7.48 (ID : 1294). Sur $\mathbb{F}_2$, calculer de proche en proche le nombre de polynômes irréductibles de degré 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Par ailleurs, exhiber ces polynômes.

Question 7.49 (ID : 1295). Sur $\mathbb{F}_3$, calculer de proche en proche le nombre de polynômes irréductibles de degré 1, 2, 3, 4, etc.

Question 7.50 (ID : 1296). Quel est le plus petit corps contenant $\mathbb{F}_4$ et $\mathbb{F}_8$?

Question 7.51 (ID : 1297). Soit $k = \mathbb{F}_{4096}$. Déterminer tous les sous-corps de k (il y en a cinq) ainsi que les inclusions entre ces sous-corps. Déterminer les degrés sur $\mathbb{F}_2$ des éléments de k (autrement dit les degrés des polynômes minimaux des éléments : ne pas confondre avec les ordres des éléments dans le groupe multiplicatif), ainsi que le nombre d'éléments de chaque degré.

Question 7.52 (ID : 1330). Pourquoi les polynômes cyclotomiques sont-ils à coefficients entiers ? Donner simplement l'idée de la preuve. Quels sont les deux lemmes cruciaux que l'on utilise pour le démontrer ?

Question 7.53 (ID : 1448). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exhiber un polynôme de degré n irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Question 7.54 (ID : 1460). On sait qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable et que l'énoncé analogue sur $\mathbb{C}$ est faux. Qu'en est-il sur un corps fini ?

Question 7.55 (ID : 1502). Si on démontre qu'il existe des polynômes irréductibles de tout degré sur $\mathbb{F}_p$ en invoquant l'existence de corps finis de cardinal p^d pour tout d , comment justifie-t-on l'existence de tels corps ?

Question 7.56 (ID : 1505). Pour quels $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme $1 + X + \cdots + X^n$ est-il irréductible sur $\mathbb{Q}$?

Question 7.57 (ID : 1571). Soit K un corps fini. Quelle est la somme de tous les éléments de K ?

Question 7.58 (ID : 1662). Montrer que le polynôme $X^3 + 6X^2 + 5X + 25$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Question 7.59 (ID : 1664). Soit P un polynôme entier unitaire de degré quatre. Comment peut-on utiliser la factorisation en irréductibles sur $\mathbb{R}$ pour avoir une condition suffisante d'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$?

Question 7.60 (ID : 1665). Sur un corps fini K de caractéristique p , on fait agir le Frobenius $z \mapsto z^p$. Que dire des orbites (nombre, cardinal, autres commentaires) ?

Que peut-on en déduire rapidement sur, par exemple, la signature du Frobenius sur $\mathbb{F}_4$? $\mathbb{F}_8$? $\mathbb{F}_{16}$? (Plus dur:) $\mathbb{F}_{64}$?

Question 7.61 (ID : 1668). Résoudre $x^3 = a$ dans $\mathbb{F}_7$.

Question 7.62 (ID : 1669). Résoudre $x^4 = a$ dans $\mathbb{F}_7$.

Question 7.63 (ID : 1673). Sur le corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p , on fait agir le Frobenius $z \mapsto z^p$ (qui est bijectif) par itérations successives. Quel est le stabilisateur d'un élément $x \in \mathbb{F}_q$?

Question 7.64 (ID : 1685). Sur $\mathbb{F}_2$, combien y a-t-il de polynômes unitaires irréductibles de degré deux ? Trois ? Quatre ? (« La suite va vous surprendre. »)

Question 7.65 (ID : 1686). On considère le Frobenius sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique p . Est-ce un endomorphisme diagonalisable ? (Sur $\mathbb{F}_p$? $\mathbb{F}_q$? $\overline{\mathbb{F}_p}$?)

Question 7.66 (ID : 1691). Le nombre complexe $(3 + 4i)/5$ est-il une racine de l'unité ?

Question 7.67 (ID : 1693). Soit k un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mu_n(k)$ l'ensemble des racines n -èmes de l'unité dans k . Que peut-on dire de cet ensemble ? Est-ce « le même » pour tout corps k ?

Question 7.68 (ID : 1772). Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme dont les coefficients vérifient $a_k \in \{\pm 1\}$ pour $0 \leq k \leq d$. Montrer que ses racines complexes sont de module ≤ 2 .

Follow-up : montrer que ses racines sont dans la couronne $1/2 \leq |z| \leq 2$.

Question 7.69 (ID : 1860). Soit k un corps fini. Une conique du plan k^2 contient combien de points ? (Par exemple la « parabole » $y = x^2$ ou le « cercle » $x^2 + y^2 = 1$?)

Question 7.70 (ID : 1861). Sur $\mathbb{R}$, il existe des coniques « vides », comme par exemple $x^2 + 1 = 0$ ou bien $x^2 + y^2 + 1 = 0$. Cette situation se produit-elle sur un corps fini ?

Question 7.71 (ID : 1919). Existe-t-il un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Q}$?

Question 7.72 (ID : 1998). Montrer de manière concrète que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique.

Question 7.73 (ID : 2014). Si k est un corps fini, alors $k^\times$ est cyclique. Proposer une preuve si possible courte et élémentaire de ce résultat.

Question 7.74 (ID : 2047). Montrer que le pgcd dans $k[X]$ est invariant par extension.

Question 7.75 (ID : 2088). Dans un corps fini $\mathbb{F}_q$ de caractéristique $\neq 2$, soient a et b non nuls et c un troisième élément. Montrer que l'équation $ax^2 + by^2 = c$ admet des solutions sur $\mathbb{F}_q$.

Question 7.76 (ID : 2090). Dans $\mathbb{F}_q$ avec q impair, comment sait-on « rapidement » si un élément x est un cube ? Par exemple, 2 est-il un cube dans $\mathbb{F}_{17}$? Dans $\mathbb{F}_{19}$?

Question 7.77 (ID : 2150). Quel est le polynôme cyclotomique Φ_{16} ?

Question 7.78 (ID : 1149). Comparer les énoncés suivants, portant sur $P \in k[X]$. Sont-elles équivalentes ? Et sous certaines conditions sur le corps k ?

1. P est sans facteurs carrés.
2. P est sans facteur carrés sur $\bar{k}$.
3. Les racines de P sont distinctes.
4. Les racines de P dans $\bar{k}$ sont distinctes.
5. $\text{pgcd}(P, P') = 1$.

Question 7.79 (ID : 1153). Sur $\mathbb{F}_p$, la proportion de polynômes irréductibles de degré d est calculable explicitement (c'est un développement). Elle est équivalente à $1/d$ lorsque $d \rightarrow \infty$. Sans faire ce calcul exact, expliquer de façon élémentaire pourquoi on peut, lorsque $p \geq 3$, minorer la proportion d'unitaires de degré d qui sont irréductibles par $\frac{1}{3d}$ et celle d'irréductibles de degré d en général par $\frac{1}{2d}$.

Question 7.80 (ID : 1155). Donner quelques exemples de nombres transcendants. Rappeler pourquoi il en existe une infinité. Y a-t-il un nombre réel dont vous connaissez une preuve de transcendance ? Savez-vous si la somme et le produit de deux nombres transcendants l'est également ?

Question 7.81 (ID : 1157). Soient a et b des nombres algébriques, de polynômes minimaux P et Q . Montrer que $a + b$ et ab sont des nombres algébriques en trouvant des polynômes **explicites** qui les annulent. Traiter l'exemple $a = \sqrt{2}$ et $b = i$ ou d'autres exemples.

Le résultat persiste-t-il pour des entiers algébriques au lieu de nombres algébriques ?

Question 7.82 (ID : 1160). Qu'est-ce que le problème de la duplication du cube ? Que peut-on dire dessus ?

Question 7.83 (ID : 1161). Qu'est-ce que le problème de la quadrature du cercle ? Que peut-on dire dessus ?

Question 7.84 (ID : 1162). Qu'est-ce que le problème de la trisection de l'angle ? Que peut-on dire dessus ? Donner un exemple d'angle qui n'est pas trisectable.

Question 7.85 (ID : 1174). Charles Hermite a démontré en 1873 que e est transcendant (sur $\mathbb{Q}$). En 1882, Ferdinand von Lindemann a démontré la même chose pour π . En admettant ces résultats, montrer que parmi les deux nombres $e + \pi$ et $e \cdot \pi$, l'un des deux au moins est transcendant. Peut-on généraliser ce résultat ?

(Note : on ne sait toujours pas, en 2021 si l'un de ces deux nombres est algébrique !)

Question 7.86 (ID : 1177). Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$. Que dire de l'ensemble des nombres premiers p tels que $A \pmod{p}$ n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{F}_p$?

Question 7.87 (ID : 1184). (Périodes de Gauss) Soit $\zeta_7 = \exp\left(i\frac{2\pi}{7}\right)$, $A = \zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^4$ et $B = \zeta_7^3 + \zeta_7^5 + \zeta_7^6$.

Calculer $A + B$ et AB , puis en déduire A et B .

Question 7.88 (ID : 1190). Montrer que $\cos(2\pi/7)$ est racine de $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$. En déduire, en utilisant une méthode de résolution des équations cubiques quelconque, que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \frac{1}{6} \left(-1 + \sqrt[3]{\frac{7}{2} - \frac{21}{2}\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{\frac{7}{2} + \frac{21}{2}\sqrt{-3}} \right),$$

où les radicaux désignent les déterminations principales. Discuter l'intérêt pratique ou théorique de cette formule.

Question 7.89 (ID : 1195). Soit p un premier impair, ζ_p une racine p -ème primitive de l'unité et $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ le p -ème corps cyclotomique. Est-ce que $\sqrt{p}$ appartient à $\mathbb{Q}(\zeta_p)$? Et $i\sqrt{p}$? De façon générale, quels sont les $\sqrt{n}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, qui appartiennent à $\mathbb{Q}(\zeta_p)$?

Question 7.90 (ID : 1220). Grosso-modo, combien de polynômes irréductibles de degré d y a-t-il sur $\mathbb{F}_q$? Idées pour attaquer cette question? Si on prend un polynôme au hasard, quelle probabilité a-t-on de tomber sur un polynôme irréductible? Statistiquement, combien d'essais doit-on faire pour en trouver un?

Question 7.91 (ID : 1273). Un horloger désire tracer (à la règle et au compas) l'emplacement des minutes sur un cadran d'horloge. Est-ce possible?

Question 7.92 (ID : 1278). Si q est une puissance d'un premier impair. Montrer que 2 est un carré dans $\mathbb{F}_q$ ssi $q \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Question 7.93 (ID : 1314). Soit $n > 1$ et P un polynôme à coefficients rationnels de degré $2n + 1$ admettant une racine α de multiplicité n . Montrer que P admet une racine rationnelle. Sur un corps autre que $\mathbb{Q}$, le résultat reste-t-il valable?

Question 7.94 (ID : 1319). Donner un exemple de polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ avec deux surcorps K et L distincts et non isomorphes sur lesquels P acquiert une racine. Donner un exemple de polynôme irréductible $P \in \mathbb{Q}[X]$ avec des corps de rupture plongés dans $\mathbb{C}$ distincts (forcément isomorphes, ceux-là).

Question 7.95 (ID : 1320). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. À quelle condition existe-t-il un automorphisme de corps de $\mathbb{C}$ qui envoie α sur β ?

Question 7.96 (ID : 1331). Pourquoi les polynômes cyclotomiques sont-ils irréductibles? Donner simplement une idée de preuve.

Question 7.97 (ID : 1648). Soit F une fraction rationnelle en T non constante, écrite sous la forme réduite P/Q . Montrer que dans $K(T)$, T est algébrique sur $K(F)$, de polynôme minimal $Q(X)F(T) - P(X) \in K(F)[X]$.

Question 7.98 (ID : 1661). Soit k un corps qui vérifie le théorème spectral : toute matrice symétrique à coefficients dans k est diagonalisable. Montrer que -1 n'est pas un carré dans k et que la somme de deux carrés est un carré dans k . En déduire que l'on peut munir k d'une structure de corps ordonné.

Question 7.99 (ID : 1663). Le polynôme $X^4 - 72X^2 + 4$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$. Proposer plusieurs méthodes pour le prouver. (Ce n'est pas grave si ça ne marche pas.)

Question 7.100 (ID : 1667). Soit $L = \mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique p , avec $q = p^n$. On note F le Frobenius, et $K = \mathbb{F}_p$.

Rappeler pourquoi F est un automorphisme K -linéaire, d'ordre n . Montrer qu'il existe un élément $x \in L$ tel que $(x, F(x), \dots, F^{n-1}(x))$ soit une K -base (dite « base normale ») de L .

Question 7.101 (ID : 1690). Quand on calcule les premiers polynômes cyclotomiques, on constate que leurs coefficients semblent toujours être 1, 0 ou -1 . Savez-vous si c'est toujours le cas?

Question 7.102 (ID : 1692). Soit L et L' des extensions finies d'un corps fini K . Combien de morphismes (de corps) y a-t-il entre L et L' ?

Question 7.103 (ID : 1862). Sur $\mathbb{R}$, les coniques irréductibles sont de trois types : ellipses, paraboles, hyperboles. Existe-t-il une telle classification sur d'autres corps, par exemple sur les corps finis?

Question 7.104 (ID : 2030). Montrer qu'une extension de corps de $\mathbb{R}$ de degré impair est triviale.

Question 7.105 (ID : 2031). Montrer que $\mathbb{C}$ ne possède pas d'extensions de degré deux.

★ ★ ★

Question 7.106 (ID : 1152). Il est connu que sur $\mathbb{F}_q$, la proportion de polynômes irréductibles de degré d est équivalente à $1/d$ lorsque $d \rightarrow \infty$ (note : c'est un développement). En particulier, les polynômes irréductibles se raréfient lorsque le degré augmente. Savez-vous si ce phénomène se produit aussi pour des polynômes à plusieurs variables (toujours à coefficients dans $\mathbb{F}_q$) ?

8 Analyse complexe (70 questions)

Question 8.1 (ID : 1126). Calculer $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$ par la méthode des résidus, lorsque $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (même si là avec une primitive ça tombe tout de suite), et pour $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

Ensuite, même question pour $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Question 8.2 (ID : 1129). Quelle est l'intégrale de Dirichlet et que vaut-elle ? Expliquez une ou plusieurs méthodes de calcul.

Question 8.3 (ID : 1130). Quelle est l'intégrale de Fresnel et que vaut-elle ? Expliquez une ou plusieurs méthodes de calcul.

Question 8.4 (ID : 1305). Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$ à l'aide de résidus.

Question 8.5 (ID : 1306). Montrer que $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ à l'aide de résidus.

Question 8.6 (ID : 1307). Montrer que $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3+\sin t} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Question 8.7 (ID : 1328). Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que $f(z)$ n'est jamais réel. Que dire de f ?

Question 8.8 (ID : 1385). Soit f holomorphe telle que pour tout $n > 0$, on ait $f(1/n) = (-1/n)^3$. Que dire de f ?

Question 8.9 (ID : 1398). Soit f une fonction holomorphe sur un disque épointé $\mathbb{D}(0, r) \setminus \{0\}$. Rappeler pourquoi, si f est bornée au voisinage de l'origine, alors f se prolonge en une fonction holomorphe à tout le disque (théorème de prolongement de Riemann).

Donner un exemple de fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur le disque épointé, bornée au voisinage de l'origine, qui n'est même pas prolongeable par continuité.

Question 8.10 (ID : 1431). Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe non constante. Montrer que son image est dense.

Question 8.11 (ID : 1489). Démontrer le principe du maximum (pour les fonctions holomorphes ou harmoniques, en fonction du contexte).

Question 8.12 (ID : 1542). Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ via des résidus.

Question 8.13 (ID : 1559). En quoi la formule de Cauchy pour les fonctions holomorphes peut-elle être vue dans certains cas comme une formule de la moyenne ? Commentaires ?

Question 8.14 (ID : 1565). Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale non constante. Montrer qu'elle est ouverte et fermée. Et si f est polynomiale réelle ? Et pour f holomorphe sur $\mathbb{C}$?

Question 8.15 (ID : 1566). Proposer une preuve (ou plusieurs !) du théorème fondamental de l'algèbre s'appuyant sur le cours de fonctions holomorphes.

Question 8.16 (ID : 1586). Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'anneau $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes sur U est-il intègre ?

Question 8.17 (ID : 1611). Que répondre à quelqu'un ayant lu sur internet que $i^i = e^{-\pi/2}$, en étant (bienveillant et) constructif ? Proposer des réponses à plusieurs niveaux (lycée, L3, M1 par exemple).

Question 8.18 (ID : 1674). Soit f une série entière de rayon infini, telle que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) \notin \mathbb{R}_+$. Que dire de f ?

Question 8.19 (ID : 1675). Soit f holomorphe sur le disque unité ouvert, qui tend vers zéro en tout point du cercle unité. Que dire de f ?

Question 8.20 (ID : 1676). Soit f une série entière de rayon 1. Est-ce que $|f|$ peut tendre vers $+\infty$ en tout point du cercle unité ?

Question 8.21 (ID : 1677). Soient f et g deux séries entières de rayon infini, avec partout $|f| < |g|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $f = \lambda g$.

Question 8.22 (ID : 1678). Soit f une série entière de rayon infini, telle que $|z| \rightarrow +\infty \implies |f(z)| \rightarrow +\infty$. Que dire de f ?

Question 8.23 (ID : 1679). Soit f une série entière de rayon infini, dont la partie réelle est bornée. Que dire de f ?

Question 8.24 (ID : 1681). Soit $f \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que si la fonction polynomiale associée, toujours notée $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, est bijective, alors f est de degré un.

Et si f est une série entière de rayon infini, au lieu d'un polynôme ?

Question 8.25 (ID : 1682). Calculer l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ en intégrant la fonction holomorphe $z \mapsto e^{iz^2}$ sur le bord du compact $K_R := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi/4 \text{ et } |z| \leq R\}$.

Question 8.26 (ID : 1697). Donner un exemple de difféomorphisme de disque unité ouvert $\mathbb{D}$ qui ne soit ni holomorphe, ni antiholomorphe.

Question 8.27 (ID : 1698). Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|f(z)| \leq |z|$ et $|f(z)| \leq |z|^2$. Que peut-on dire de f ?

(Même question si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est la somme d'une série entière.)

Question 8.28 (ID : 1699). On parle souvent de « rigidité » pour qualifier les fonctions holomorphes et leurs propriétés. Comment décrire les propriétés en question et pourquoi utiliser ce mot ?

Question 8.29 (ID : 1700). Donner l'idée de la preuve de la formule de Cauchy à l'aide du théorème intégral de Cauchy.

Question 8.30 (ID : 1702). Déterminer l'écriture en coordonnées polaires des équations de Cauchy-Riemann.

Question 8.31 (ID : 1707). Expliquer en quoi la formule intégrale de Cauchy pour écrire les coefficients d'une série entière ressemble à des coefficients de Fourier. De quelle fonction périodique ? Expliquer la correspondance entre les développements en série de Fourier et les fonctions holomorphes. (En précisant le domaine d'holomorphie de ces dernières.)

Question 8.32 (ID : 1708). Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, s'annulant en 0 et 1. Existe-t-il une fonction holomorphe g telle que $f(z) = z(z-1)g(z)$?

Question 8.33 (ID : 1710). Le principe du maximum dit qu'une fonction holomorphe qui n'est pas localement constante au voisinage d'un point n'a pas de maximum local (en module) en ce point. Expliquer de différentes manières ce résultat (avec un dessin par exemple), et donner un exemple de fonction différentiable simple $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ qui admet un maximum local (en module/norme) en un point.

Question 8.34 (ID : 1782). Soit f une fonction holomorphe du disque ouvert dans lui-même. Peut-on prolonger f par continuité au bord du disque ?

Question 8.35 (ID : 1806). Une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant le principe du maximum est-elle nécessairement holomorphe ?

Question 8.36 (ID : 1807). Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le principe du maximum est-elle nécessairement harmonique ?

Question 8.37 (ID : 1835). Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction holomorphe. Montrer que si $\operatorname{Re} f$ est majorée, alors elle est également minorée. Peut-on dire plus ?

Question 8.38 (ID : 1836). Il est connu qu'il existe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, au voisinage de $+\infty$, sont à la fois sous-exponentielles et superpolynomiales. Existe-t-il de telles fonctions parmi les séries entières (de rayon infini) ?

Question 8.39 (ID : 1837). Expliquer pourquoi la fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos \sqrt{x}$ s'étend en une fonction holomorphe $z \mapsto \cos \sqrt{z}$ définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, et ce malgré le fait que la racine carrée complexe, elle, n'y soit pas définie.

Question 8.40 (ID : 1838). Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon infini vérifiant $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| \geq |z|^N$. Montrer que f est un polynôme. Que peut-on dire de plus ?

Question 8.41 (ID : 1908). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1. Sa somme f sur le disque unité ouvert peut-elle être bornée, ou bien doit-il y avoir un point du cercle près duquel elle est non bornée ?

Question 8.42 (ID : 2007). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière qui converge vers zéro pour tout z de module un. Montrer que tous les coefficients a_n sont nuls.

Question 8.43 (ID : 2129). Soit f une fonction entière. Si $f|_{\mathbb{R}}$ est 1-périodique, est-ce que f est elle-même 1-périodique ?

★ ★ ★

Question 8.44 (ID : 1066). L'anneau des fonctions holomorphes est-il principal ? Est-il factoriel ?

Question 8.45 (ID : 1298). Le résidu, vu comme une application de $\mathbb{C}((t))$ vers $\mathbb{C}$, est-il une application linéaire ? Est-ce un morphisme d'algèbres ? Donner des formules simples pour $\operatorname{Res}(f')$, $\operatorname{Res}(f \cdot g')$, $\operatorname{Res}(f'/f)$ et $\operatorname{Res}((f \circ g) \cdot g')$.

Question 8.46 (ID : 1304). Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1 et de somme f .

1. Pour $0 < r < 1$, calculer $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$ en fonction de $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et r .
2. On suppose f bornée sur $\mathbb{D}$. Montrer que a est de carré sommable. La condition est-elle nécessaire ?

Si possible, proposer plusieurs rédactions, dont une qui n'utilise que des résultats élémentaires (niveau prépa).

Question 8.47 (ID : 1310). Pour f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert $\mathbb{D}$ et $r \in]0, 1[$, on note $M(f, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt$.

1. Exprimer $M(f, r)$ en fonction des coefficients a_n et montrer que $r \mapsto M(f, r)$ est croissante.
2. On note $H^2(\mathbb{D})$ l'ensemble des $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ telles que $\sup_{r < 1} M(f, r) < \infty$. Montrer que c'est un espace de Hilbert une fois muni de la norme $\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{r < 1} M(f, r)$, isométrique à $\ell^2(\mathbb{N})$ muni de sa norme usuelle.

Question 8.48 (ID : 1612). Sur un ouvert simplement connexe, une fonction holomorphe f qui ne s'annule pas est de la forme e^g , avec g holomorphe. Rappeler pourquoi. Donner un contre-exemple simple lorsque l'ouvert n'est pas simplement connexe.

Question 8.49 (ID : 1680). Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique. Est-ce la partie réelle d'une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$?

Question 8.50 (ID : 1684). On se donne une suite $(z_n)_n$ de nombres complexes distincts, et $(\alpha_n)_n$ une suite de complexes. Existe-t-il une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}$ qui a des pôles exactement aux z_n , avec un résidu égal à α_n ? Connaissez-vous des variations de ce théorème ?

Question 8.51 (ID : 1689). [Forme intégrale des projecteurs spectraux] Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, $\sigma(A)$ son spectre $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ son ensemble résolvant et $R_A : \rho(A) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), z \mapsto (zI - A)^{-1}$ sa résolvante. Si γ est un lacet de $\rho(A)$, on considère

$$\Pi := \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} R_A(z) dz$$

1. Si γ est un lacet simple orienté positivement qui entoure une seule valeur propre λ , montrer que Π est le projecteur sur l'espace propre $\ker(A - \lambda I)$ parallèlement aux autres espaces propres.
2. Et si A n'est plus diagonalisable ?
3. Et si A n'est plus une matrice, mais un opérateur borné d'un Banach complexe ?

Question 8.52 (ID : 1696). Soit G le groupe des automorphismes (biholomorphes) du disque unité ouvert $\mathbb{D}$.

Le groupe G agit-il transitivement sur $\mathbb{D}$? Pour quels k agit-il k -transitivement ? À quoi G est-il isomorphe comme groupe abstrait ?

Question 8.53 (ID : 1703). Comment utiliser le groupe des biholomorphismes du disque pour déterminer le groupe des biholomorphismes d'une ellipse pleine ?

Question 8.54 (ID : 1704). Quel est le groupe des biholomorphismes d'une couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid R < |z| < R'\}$?

Et d'une couronne décentrée du type $\mathbb{D}(0, 3) \setminus \overline{\mathbb{D}(i, 1)}$?

Question 8.55 (ID : 1706). Quel est le groupe des biholomorphismes du disque unité épointé $\mathbb{D}^*$?

Question 8.56 (ID : 1709). Si $a \in \mathbb{D}$, interpréter géométriquement la transformation

$$\phi_a : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}, z \mapsto \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

(Dessiner son effet sur les points du disque.)

Question 8.57 (ID : 1774). Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Montrer que f est méromorphe à l'origine si et seulement si on peut prolonger f en une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$.

Question 8.58 (ID : 1776). Soit $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert et $G = \text{BiHolom}(\mathbb{D})$ son groupe de biholomorphismes, qui agit dessus. À quoi est isomorphe le stabilisateur d'un point z_0 ?

Question 8.59 (ID : 1777). Il est connu que le groupe des automorphismes du disque est en bijection avec $S^1 \times \mathbb{D}$. Mais en tant que groupe, à quoi est-il isomorphe ? Par exemple, est-il isomorphe à un groupe matriciel classique, ou bien peut-il être décrit comme produit ou extension de groupes classiques ?

Question 8.60 (ID : 1778). Le groupe des automorphismes du disque contient-il des sous-groupes finis ? Isomorphes à S^1 , ou à $\mathbb{C}^*$? Aux groupes additifs $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$? Si oui, ces sous-groupes sont-ils uniques ? Donner des exemples.

Question 8.61 (ID : 1783). Soit f un biholomorphisme du disque ouvert. Peut-on prolonger f par continuité au bord du disque ?

Question 8.62 (ID : 1784). Soit f un biholomorphisme du disque ouvert vérifiant $f \circ f = \text{Id}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Question 8.63 (ID : 1786). Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ qui ne soit pas prolongeable en une fonction holomorphe sur un ouvert plus grand.

Question 8.64 (ID : 1787). Que peut-on dire d'un biholomorphisme du disque ouvert qui possède deux points fixes ?

Question 8.65 (ID : 1788). Soit $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ envoyant le disque ouvert dans lui-même et continue sur le disque fermé. Montrer que si $f(a) = 0$, alors $|f(0)| \leq |a|$.

Follow-up : montrer que si f s'annule aux points a_i avec multiplicité m_i , alors $|f(0)| \leq \prod |a_i|^{m_i}$.

Question 8.66 (ID : 1843). Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Existe-t-il une fonction entière $f(z) = \sum a_n z^n$ avec $|f(x)| \geq \phi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ assez grand ?

Question 8.67 (ID : 1909). Sur le théorème d'Abel non tangentiel : la condition d'approche non tangentielle est-elle vraiment nécessaire où bien est-ce simplement une condition technique garantissant une preuve simple ?

Question 8.68 (ID : 1956). Vous avez montré que les automorphismes du disque sont tous de la forme $\lambda \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} = \lambda \phi_a(z)$. La composée $\phi_a \circ \phi_b$ doit donc être de la forme $\lambda \phi_c$. Qui est c ? Interprétation géométrique ?

Question 8.69 (ID : 2005). Dans le « théorème d'Abel non tangentiel », quelle serait la définition d'une convergence qui serait « tangentielle » ? (Serait-ce la même chose qu'une convergence non « non-tangentielle » ?)

Dans le cas d'une convergence qui n'est plus non-tangentielle, expliquer à quel endroit la preuve présentée devient insuffisante et pourquoi.

Peut-on modifier la preuve pour obtenir un énoncé de théorème d'Abel valide même pour une convergence tangentielle ?

Question 8.70 (ID : 2008). Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon 1 et de somme f sur le disque unité ouvert. On suppose qu'en tout point $z_0 \in \mathbb{S}^1$, la limite de f quand $z \rightarrow z_0$ est nulle. Montrer que f est nulle. Et si on suppose seulement qu'en tout point du cercle, la limite radiale de f est nulle ? (Difficile, plutôt pour l'écrit. Baire et plusieurs autres arguments.)

9 Analyse fonctionnelle (63 questions)

Question 9.1 (ID : 1627). Expliquer de deux manières pourquoi la boule unité d'un espace euclidien est strictement convexe.

Question 9.2 (ID : 1628). Donner un exemple d'espace vectoriel E avec deux normes non équivalentes, l'une plus fine que l'autre.

Question 9.3 (ID : 2020). La norme de ℓ^1 dérive-t-elle d'un produit scalaire ? Et en dimension finie ?

Question 9.4 (ID : 2125). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Est-elle continue ? Que peut-on dire sur le choix de l'espace d'arrivée ?

★ ★ ★

Question 9.5 (ID : 1356). Soient $p, q \in [1; +\infty]$, et Ω un espace mesuré de mesure finie. Montrer de deux manières différentes que si $p \leq q$, alors $L^q \subset L^p$.

Question 9.6 (ID : 1358). 1. Soient f et g dans L^4 . Montrer que fg est dans L^2 .

2. Soient maintenant f et g dans L^3 . Montrer que f^2g est intégrable.

Question 9.7 (ID : 1404). Montrer que les ℓ^p sont complets, avec $p \in [1, +\infty]$.

Question 9.8 (ID : 1405). Cours : montrer qu'un EVN est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

Question 9.9 (ID : 1445). Dans un evn, montrer qu'un hyperplan est soit fermé, soit dense.

Question 9.10 (ID : 1553). Donner un exemple d'ev E avec deux normes, et d'une forme linéaire $\phi \in E^*$ continue pour la première norme et discontinue pour la seconde. (Si possible, donner plusieurs exemples pour E .)

Question 9.11 (ID : 1554). Donner un exemple d'un $\mathbb{R}$ -ev E et d'un endomorphisme $\phi : E \rightarrow E$ qui n'est continu pour aucune norme sur E .

Question 9.12 (ID : 1555). Sur $E = \mathbb{R}[X]$, trouver une norme pour laquelle la dérivation est continue, et une autre pour laquelle la dérivation est discontinue.

Question 9.13 (ID : 1561). Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Dessus, on considère les normes

$$\|f\|_{L^1}, \quad \|f\|_{L^2}, \quad \|f\|_{\mathcal{C}^0} = \|f\|_{\infty},$$

$$\|f\|_{H^1} = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 + \int_0^1 |f'|^2}, \quad \text{et } \|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$$

Comparer ces normes et montrer avec des contre-exemples qu'elles ne sont pas équivalentes.

Question 9.14 (ID : 1619). Soit $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Que peut-on dire de $\text{Conv}(A)$ si A est ouverte ? Fermée ? Compacte ?

Question 9.15 (ID : 1620). Soit E un $\mathbb{R}$ -evn et E' son dual, c'est-à-dire l'ev des formes linéaires continues sur E , muni de la norme naturelle : la norme d'opérateur. Montrer que E et E' ne sont pas isométriques en général, même en dimension finie.

Question 9.16 (ID : 1629). Donner un exemple d'espace vectoriel E avec deux normes dont aucune n'est plus fine que l'autre.

Question 9.17 (ID : 1770). On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme ℓ^1 , et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'opérateur (aussi dite norme triple) associée. Comment calculer la norme d'une matrice donnée ? Comment décrire la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ pour cette norme ? Quels sont ses points extrémaux ?

Question 9.18 (ID : 1858). Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, orthogonale à toute indicatrice de segment. Que peut-on dire de f ?

Question 9.19 (ID : 2019). On munit ℓ^1 de la norme de Hilbert de ℓ^2 : est-ce bien défini ? Est-ce que ça permet d'obtenir un espace de Hilbert ?

Question 9.20 (ID : 2024). Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, que dire d'une partie convexe dont le complémentaire est convexe ?

Question 9.21 (ID : 2112). Pour la preuve de l'unicité de la projection sur un convexe fermé, quelle propriété cruciale de la norme utilise-t-on ? Le résultat est-il vrai dans un Banach général ? Avoir un espace euclidien est-il nécessaire ?

Question 9.22 (ID : 2120). Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel strict de E . Quel est l'intérieur de F ?

Question 9.23 (ID : 2124). Illustrer par un dessin la caractérisation avec le produit scalaire du projeté sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert.

★ ★ ★

Question 9.24 (ID : 1131). Comment démontre-t-on la CNS de densité dans les espaces de Hilbert avec la nullité de l'orthogonal ?

Question 9.25 (ID : 1240). Citer des versions géométriques de Hahn-Banach (dont une avec des convexes fermés).

Question 9.26 (ID : 1382). Qu'y a-t-il comme parties compactes intéressantes de $L^2([0, 1])$? À quoi servent-elles ?

Question 9.27 (ID : 1383). Donner plusieurs exemples d'opérateurs compacts et non compacts. Applications ?

Question 9.28 (ID : 1390). L'opérateur de Volterra V est l'opérateur linéaire qui envoie f sur $Vf : x \mapsto \int_0^x f$.

Est-il bien défini sur $\mathcal{C}^0([0, 1])$? Quelle est sa norme? Est-il compact? A-t-il des valeurs propres, des vecteurs propres? Quel est son spectre? Est-il approximable par des opérateurs de rang fini?

Mêmes questions sur les espaces $L^\infty[0, 1]$, puis $L^p[0, 1]$ avec $p > 1$ (et en particulier $L^2[0, 1]$), puis enfin le plus gros : $L^1[0, 1]$.

Plus difficile : norme de V vu comme opérateur de L^p dans L^q ?

Question 9.29 (ID : 1391). Soit $g \in \ell^2$. L'opérateur $\ell^2 \rightarrow \ell^2, f \mapsto (g_n f_n)$ est-il continu? Compact?

Question 9.30 (ID : 1392). On s'intéresse à l'opérateur $T : f \mapsto xf$. Sur $\mathcal{C}^0[0, 1]$, est-il continu? Est-il compact? Et sur $L^2[0, 1]$?

Question 9.31 (ID : 1393). Soit H un espace de Hilbert (de dimension infinie) et ϕ un opérateur compact sur H . Montrer que le spectre de ϕ contient 0.

Question 9.32 (ID : 1394). Si un opérateur T est compact, alors T^2 aussi. La réciproque est-elle vraie?

Question 9.33 (ID : 1395). L'opérateur de Hardy H envoie f sur $Hf : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f$. Est-il bien défini et borné sur $\mathcal{C}^0[0, 1]$? Sur $L^p[0, 1]$?

Est-il compact sur $\mathcal{C}^0[0, 1]$? De $\mathcal{C}^0[0, 1]$ dans $L^2[0, 1]$?

Plus difficile : montrer que H est bien défini et borné sur $L^p(\mathbb{R}_+)$, et que sa norme est $q = \frac{p}{p-1}$, l'exposant conjugué. (Inégalité de Hardy.)

Montrer que H n'est pas compact sur $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Question 9.34 (ID : 1400). À quoi servent les opérateurs compacts?

Question 9.35 (ID : 1402). Soit c_0 l'espace de Banach des suites qui tendent vers zéro, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ et

$$T : \ell^2 \rightarrow \ell^2, \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_n a_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Montrer que cet opérateur est bien défini et borné. Montrer qu'il est compact de deux façons : en montrant qu'il est limite d'opérateurs de rang fini, et en vérifiant la définition (image de la boule unité relativement compacte).

Si on remplace l'espace ℓ^2 par l'espace des suites presque nulles (muni de la norme ℓ^2 par exemple), montrer que T est borné, qu'il est limite d'opérateurs de rang fini, mais qu'il n'est pas compact.

Question 9.36 (ID : 1406). On considère les espaces $\mathcal{C}^n[0, 1]$ munis de leur norme naturelle $\|f\|_{\mathcal{C}^n} = \|f\|_\infty + \dots + \|f^{(n)}\|_\infty$.

Montrer que l'opérateur de dérivation

$$D : \mathcal{C}^n[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^0[0, 1]$$

est continu, et qu'il est compact ssi $n \geq 2$.

Question 9.37 (ID : 1407). Soient α, β des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Montrer que

$$T : f \mapsto \left(x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) dt \right)$$

est un opérateur borné et compact de $\mathcal{C}^0[0, 1]$ dans lui-même.

Question 9.38 (ID : 1408). Montrer que $T : f \mapsto \int_0^1 \sin(x^2 + y^2) f(y) dy$ est un opérateur (borné et) compact de $L^2[0, 1]$ dans lui-même, de plusieurs manières :

- par un argument général sur les opérateurs dans des Hilberts ;
- en montrant que T est à valeurs dans les fonctions continues et que $T : L^2[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^0[0, 1]$ est déjà compact ;
- en montrant que l'opérateur est en fait de rang fini.

Question 9.39 (ID : 1411). Soit $f \in \mathcal{C}^0[0, 2\pi]$. Le problème

$$\begin{cases} y'' + y = f \\ y(0) = 0 \text{ et } y(2\pi) = 0, \end{cases}$$

a-t-il toujours une solution ?

Question 9.40 (ID : 1415). Soit $H^1[0, 2\pi]$ le sous-espace de $L^2[0, 2\pi]$ des éléments dont le développement en série de Fourier a des coefficients vérifiant

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n|^2 < \infty.$$

1. Montrer que $H^1[0, 2\pi]$ muni de $\|f\|_{H^1} := \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + n^2) |c_n(f)|^2}$ est un espace de Hilbert (espace de Sobolev). Montrer que les polynômes trigonométriques sont denses dedans.
2. Montrer que la condition qui définit l'espace H^1 est équivalente à demander que f soit un élément de L^2 dont la dérivée généralisée soit un élément de L^2 . Montrer que la norme définie plus haut est équivalente à $N(f)^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2$.
3. Montrer que les éléments de $H^1[0, 2\pi]$ sont des fonctions continues et $\frac{1}{2}$ -hölériennes.
4. Montrer enfin que l'injection $H^1[0, 2\pi] \subset L^2[0, 2\pi]$ est continue d'image dense, et compacte.
5. Connaissez-vous des exemples d'utilisation concrète de cet espace fonctionnel ?

Question 9.41 (ID : 1437). Montrer que $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable.

Question 9.42 (ID : 1440). Un Hilbert séparable est isométrique à ℓ^2 . Expliciter un tel isomorphisme.

Question 9.43 (ID : 1446). Dans un evn, montrer que le complémentaire d'un hyperplan dense est connexe par arcs.

Question 9.44 (ID : 1544). Proposer quelques applications du théorème d'Ascoli.

Question 9.45 (ID : 1576). Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme d'algèbres. Montrer que f est continu.

Question 9.46 (ID : 1601). Vous avez dit « evt localement convexe »... Connaissez-vous des exemples d'evt non localement convexes ?

Question 9.47 (ID : 1603). L'espace de Sobolev H^1 a été évoqué. Donner un exemple d'utilisation de cet espace, en détaillant un peu.

Question 9.48 (ID : 1616). Citer des exemples de parties denses de L^∞ .

Question 9.49 (ID : 1617). $L^1(\mathbb{R})$ est-il le dual (topologique) de $L^\infty(\mathbb{R})$? Et $L^\infty(\mathbb{R})$ est-il le dual de $L^1(\mathbb{R})$?

Question 9.50 (ID : 1618). L'espace l^1 est-il le dual (topologique) de l^∞ ? Et l^∞ est-il le dual de l^1 ?

Question 9.51 (ID : 1621). Dans $\mathbb{R}^n$, deux convexes disjoints peuvent être séparés au sens large par un hyperplan. Expliquer pourquoi. Expliquer comment affaiblir légèrement l'hypothèse.

Question 9.52 (ID : 1623). Énoncer le théorème de séparation de Hahn-Banach sous forme géométrique, avec séparation stricte. Expliquer pourquoi on ne peut pas séparer deux convexes fermés au sens strict.

Question 9.53 (ID : 1624). Soit E un evn et soient A et B deux convexes disjoints et non vides. Peut-on les séparer au sens large par un hyperplan fermé ?

Question 9.54 (ID : 1625). Le théorème de Krein-Milman en dimension finie dit qu'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Et si le convexe n'est pas compact ? Par exemple non borné ? Non fermé ? Le théorème se généralise-t-il en dimension infinie ?

Question 9.55 (ID : 1626). Un point p d'un convexe $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *exposé* s'il existe un hyperplan d'appui H en p tel que $H \cap C = \{p\}$. La notion de point exposé est-elle équivalente à celle de point extrémal ?

Question 9.56 (ID : 1640). Le théorème de Brouwer affirme qu'une application continue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans elle-même possède au moins un point fixe. Trouver un contre-exemple en dimension infinie.

Question 9.57 (ID : 1658). Justifier qu'il existe une fonction u telle que pour toute fonction v de carré intégrable et de dérivée de carré intégrable, on ait

$$v(0) = \int uv + \int u'v'$$

Question 9.58 (ID : 1687). Rappeler la définition du spectre d'un opérateur borné d'un Hilbert complexe. Montrer que c'est un compact non vide de $\mathbb{C}$.

Question 9.59 (ID : 1688). Soit E un Banach, A un opérateur borné, et R_A l'application résolvante de A . Montrer l'équation de la résolvante :

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda)R_A(\lambda)R_A(\mu).$$

Savez-vous à quoi peut servir cette équation ?

Question 9.60 (ID : 1760). Donner un exemple de convexe fermé borné sans points extrémaux.

Question 9.61 (ID : 1854). Dans un Hilbert séparable H muni d'une base hilbertienne (e_n) . Un élément $v = \sum a_n e_n$ correspond à une suite $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et si ce vecteur v est dans la boule unité, on $(a_n) \in [-1, 1]^{\mathbb{N}}$, qui est un produit de compacts, donc compact. Donc la boule unité est compacte, même en dimension infinie ? Trouver l'erreur.

Question 9.62 (ID : 1859). Donner plusieurs bases hilbertiennes (de $L^2([0, 1])$ et de $L^2(\mathbb{R})$). À quoi ça sert ?

Question 9.63 (ID : 2066). Soit E un Banach et $K \subseteq E$ un compact. Est-ce que K peut engendrer E ?

10 Analyse : fonctions réelles et calcul intégral (131 questions)

Question 10.1 (ID : 1189). Calculer $\cos(\pi/8)$ et $\cos(\pi/12)$ de plusieurs manières.

Question 10.2 (ID : 1524). Une fonction monotone a-t-elle des limites à gauche et à droite ? Pourquoi ?

Question 10.3 (ID : 1728). Donner des exemples de séries numériques convergentes ou divergentes pour lesquelles le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure, voire même ne peut même pas être utilisé.

Question 10.4 (ID : 1748). Les relations de domination et de prépondérance sur l'ensemble des suites réelles sont-elles des relations d'ordre ?

Question 10.5 (ID : 1873). Si f est dérivable sur $]a, b[$ et $]b, c[$ et que f' admet une limite en b , est-ce que f est dérivable en b ?

Question 10.6 (ID : 1905). Donner une approximation rationnelle de $\sin(1)$ au centième près (calcul simple).

Question 10.7 (ID : 2012). La cotangente est définie par $\cotan x = \frac{1}{\tan x}$, mais pour autant on n'a pas $\cos x = \frac{1}{\sin x}$. Par ailleurs, on a les définitions de sécante et cosécante suivantes (peu populaires en France ces dernières années mais largement enseignées dans plusieurs pays) : $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ et $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$. Quelle est la logique derrière ces définitions ? Faire un dessin.

Question 10.8 (ID : 2023). Que peut-on dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à la fois convexe et concave ?

Question 10.9 (ID : 2035). Interpréter géométriquement la deuxième inégalité triangulaire. Faire un dessin en dimension deux pour illustrer.

Question 10.10 (ID : 2126). On a $\operatorname{co} \sin(x) = \pm \sqrt{1 - \sin(x)^2}$, $\operatorname{co} \tan(x) = \frac{1}{\tan(x)}$, et il y a aussi des fonctions un peu moins enseignées (en France) *sécante* et *cosécante* définies par $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ et $\operatorname{co} \sec(x) = \frac{1}{\sin(x)}$. Quelle est la logique ?

★ ★ ★

Question 10.11 (ID : 1080). Une fonction dérivable avec $f'(a) > 0$ est-elle croissante au voisinage de a ?

Question 10.12 (ID : 1081). Si une fonction f admet un DL d'ordre n en 0, peut-on dire qu'elle est n fois dérivable en 0 et que le k -ème terme du DL est donné par $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$?

Question 10.13 (ID : 1111). Calculer l'aire d'une ellipse, le volume d'un ellipsoïde.

Question 10.14 (ID : 1115). Définir la convergence uniforme. Est-ce que ça a un sens pour des fonctions non bornées ?

Question 10.15 (ID : 1119). Discuter l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} dt$.

Question 10.16 (ID : 1125). Décomposer $\frac{1}{x^4 + 1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et donner une primitive.

Question 10.17 (ID : 1301). Calculer l'aire de l'ellipse pleine $x^2 + 4y^2 \leq 4$, d'abord de tête par un raisonnement simple, ensuite à l'aide du changement de variable $x = 2r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ et de la formule avec le jacobien.

Question 10.18 (ID : 1302). Calculer le volume de la boule de rayon R de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques et de la formule de changement de variable avec le jacobien. En déduire l'aire de la sphère de rayon R .

Question 10.19 (ID : 1309). Calculer les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt$.

Question 10.20 (ID : 1339). Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f + f' \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Montrer que $f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Même question pour une limite l non nécessairement nulle.

Question 10.21 (ID : 1361). On considère deux suites réelles $u_n \sim v_n$. Montrer que l'on n'a pas forcément $e^{u_n} \sim e^{v_n}$. Exhiber un exemple où on a même $e^{u_n} = o(e^{v_n})$.

Question 10.22 (ID : 1428). On désire calculer π à l'aide de la formule $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$ et du développement en série de l'arctangente. Est-ce une bonne idée ? Combien d'étapes sont nécessaires pour être sûr d'avoir d'avoir une précision de $1/100$?

Autres idées pour calculer des approximations de π ?

Question 10.23 (ID : 1429). Quel calcul simple sur des nombres complexes peut aider à démontrer rapidement la formule de John Machin

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) ?$$

En utilisant cette formule avec l'approximation la plus naïve de l'arctangente (une étape), quelle marge d'erreur a-t-on pour le calcul de π ? Et avec deux étapes ?

Question 10.24 (ID : 1430). On souhaite calculer π à l'aide de la formule $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Quelle précision peut-on espérer, au bout de combien d'itérations ? Par exemple, que donne la première approximation ? La deuxième ?

Question 10.25 (ID : 1436). Expliquer comment calculer $\ln(2)$ à l'aide d'une série. À quelle vitesse converge cette série ? Trouver une astuce pour améliorer la convergence, avec la même série entière. En implémentant l'astuce, calculer $\ln(2)$ à $1/10$ près.

Question 10.26 (ID : 1438). Donner un exemple d'application :

1. non uniformément continue ;
2. uniformément continue mais pas Lipschitz ;
3. bornée mais non uniformément continue.

Question 10.27 (ID : 1521). Donner un exemple de fonction convexe discontinue.

Question 10.28 (ID : 1522). Comment caractériser les fonctions convexes à l'aide de l'épigraphe ?

Question 10.29 (ID : 1537). Une fonction continue périodique est-elle uniformément continue ?

Question 10.30 (ID : 1572). À quoi servent les « bosses glissantes » ? Que permettent-elles de prouver, d'infirmer, d'illustrer ?

Question 10.31 (ID : 1660). Que peut-on dire de fonctions f et g vérifiant la règle de « dérivation des cancras » $(fg)' = f' \times g'$?

Question 10.32 (ID : 1714). Donner des exemples de fonctions continues sur $]0, 1[$ ou sur $\mathbb{R}$ qui sont intégrables mais non bornées.

Question 10.33 (ID : 1717). Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Montrer que si f est surjective, alors elle atteint tout réel une infinité de fois.

Question 10.34 (ID : 1718). Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ et $M = \|f''\|_\infty$. Si $f(a) = f(b) = 0$, montrer que l'on a le contrôle suivant :

$$\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M(x-a)(b-x)/2.$$

Question 10.35 (ID : 1719). Montrer qu'une fonction convexe sur un intervalle borné est minorée.

Question 10.36 (ID : 1720). Montrer qu'une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ qui est bornée est forcément constante.

Question 10.37 (ID : 1724). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ le n -ème nombre harmonique.

Montrer que :

1. $H_n \simeq \ln(n)$;
2. $H_n - \ln(n)$ converge vers un réel (appelé constante γ d'Euler) ;
3. $H_n - \ln(n) - \gamma \simeq \frac{1}{2n}$.
4. Connaissez-vous le terme suivant ? Savez-vous s'il existe une formule générale ?

Question 10.38 (ID : 1732). Soit (f_n) une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ qui converge uniformément. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que la suite de fonctions $(g \circ f_n)_n$ converge uniformément.

Question 10.39 (ID : 1733). (Transformations sur les graphes) Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les suites de fonctions $f_n : x \mapsto \phi(nx)$, $g_n : x \mapsto \phi(x/n)$ et $h_n : x \mapsto \phi(x-n)$. Que peut-on dire de la convergence simple de ces trois suites ? Cette convergence est-elle uniforme ? (On pourra être amené à distinguer des cas ou bien à dégager des conditions nécessaires ou suffisantes.)

Question 10.40 (ID : 1743). Montrer que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(2)$.

Question 10.41 (ID : 1745). (Baby-Darboux) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, vérifiant $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Montrer que f' s'annule.

Question 10.42 (ID : 1749). Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) = -x$?

Question 10.43 (ID : 1750). Une fonction uniformément continue est-elle lipschitzienne ? Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe des réels A et B tels que $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq Ax + B$.

Question 10.44 (ID : 1751). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que si f et f'' sont bornées, alors f' l'est également.

Question 10.45 (ID : 1756). Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = f(3-x)$ pour tout réel x .

Question 10.46 (ID : 1762). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui tend vers zéro en $+\infty$. Est-ce que f' tend vers zéro également ? Et si f est décroissante ? Et $\mathcal{C}^1$? Si on considère des limites en zéro au lieu de $+\infty$, les réponses sont-elles différentes ?

Question 10.47 (ID : 1765). Les fonctions k -Lipschitz sur $\mathbb{R}$ forment-elles un ev ? Les fonctions Lipschitz forment-elles un ev ? Le sup d'une famille de fonctions k -Lipschitz est-il k -Lipschitz ? (En supposant que ce sup soit bien défini.)

Question 10.48 (ID : 1775). Le théorème des valeurs intermédiaires admet-t-il une réciproque ? Autrement dit, une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle forcément continue ?

Question 10.49 (ID : 1791). Donner différents exemples de « bosses glissantes » sur $\mathbb{R}$, et sur $]0, 1[$, avec des formules explicites.

Question 10.50 (ID : 1805). Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant le principe du maximum ?

Question 10.51 (ID : 1832). Donner un exemple de fonction f croissant plus vite que tout polynôme (superpolynomiale) et négligeable devant toute exponentielle (sous-exponentielle).

Question 10.52 (ID : 1842). On désire calculer une valeur approchée de $\pi^2/6$ à l'aide de la série $\sum \frac{1}{n^2}$. Combien de termes doit-on sommer pour avoir une précision d'un dixième ?

Question 10.53 (ID : 1845). Si $f(x) = O(x^{\alpha+\epsilon})$ pour tout $\epsilon > 0$, est-ce que $f(x) = O(x^\alpha)$?

Question 10.54 (ID : 1866). Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ avec tangente verticale en l'origine, mais qui soit négligeable devant $\sqrt{x}$ et en fait devant x^α pour tout $\alpha < 1$.

Question 10.55 (ID : 1870). Soit $(u_n)_n \in \ell^1$. Est-ce que $u_n \leq \frac{1}{n}$ pour n assez grand ?

Question 10.56 (ID : 1877). Donner un développement asymptotique de $\arctan(x)$ en $+\infty$ à la précision $o(1/x^n)$.

Question 10.57 (ID : 1888). Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$ et tangente verticale en l'origine plus « forte » que tous les x^α , c'est-à-dire avec $x^\alpha = o(f(x))$ au voisinage de l'origine pour tout $\alpha > 0$?

Question 10.58 (ID : 1889). Donner un exemple de fonction lisse (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ non nulle et plate en zéro (c'est-à-dire dont toutes les dérivées sont nulles en zéro). On demande une formule explicite, relativement simple.

Question 10.59 (ID : 1898). La fonction $x \mapsto x\sqrt{|x|}$ est-elle dérivable en zéro ? De classe $\mathcal{C}^1$? Que peut-on dire de ses développements limités en l'origine ?

Question 10.60 (ID : 1899). Expliquer comment construire une fonction $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ qui ne soit pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Question 10.61 (ID : 1901). Soient $n > 1$ un entier. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant en l'origine un développement limité d'ordre n mais pas de DL d'ordre $n + 1$?

Question 10.62 (ID : 1932). Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et nulle en l'origine. Montrer que $1/f$ n'est pas intégrable au voisinage de l'origine.

Question 10.63 (ID : 1962). On considère la suite d'intégrales $u_n = \int_1^e \ln^n(t) dt$. Donner sa limite, sa vitesse de convergence, puis un équivalent.

Question 10.64 (ID : 1969). Que dire de $\sum \frac{\sin(nx)}{n\sqrt{n}}$?

Question 10.65 (ID : 1982). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$. Déterminer $\inf \{|f'(t)|, t \in \mathbb{R}\}$.

Question 10.66 (ID : 1996). On considère les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$. Sans chercher à les calculer en fonction de n , donner leur limite, leur vitesse de convergence, puis un équivalent.

Question 10.67 (ID : 2022). Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Est-elle décroissante à partir d'un certain rang ?

Question 10.68 (ID : 2025). Quelle est la nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{1+n^2})$?

Question 10.69 (ID : 2027). Si u_n est une suite, est-ce que la suite $(1+u_n/n)^n$ est équivalente à u_n ? Exemples / contre-exemples ? Consolidation pour l'écrit : DA à trois termes de $(1+\ln(n)/n)^n$.

Question 10.70 (ID : 2029). Limite de $(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3})^n$.

Consolidation pour l'écrit : DA à trois termes.

Question 10.71 (ID : 2104). Proposer une preuve du théorème de Darboux utilisant la connexité.

Question 10.72 (ID : 2108). Donner un exemple de suite de fonctions continues, qui converge vers une fonction continue, mais pas uniformément.

Question 10.73 (ID : 2111). Donner un exemple de fonction C^1 mais pas deux fois dérivable.

Question 10.74 (ID : 2113). Soit f une fonction convexe et différentiable sur $\mathbb{R}$, soit a dans $\mathbb{R}$ tel que a est point critique de f . Que dire de a ?

Question 10.75 (ID : 2144). Proposer différentes méthodes pour calculer $\sqrt{3}$ au centième près, en menant les calculs et en discutant à chaque étape la précision obtenue a priori.

★ ★ ★

Question 10.76 (ID : 1100). Citer quelques intégrales célèbres (entre deux et cinq), comme l'intégrale de Gauss (sans les calculer), et dire en quoi elles vous plaisent (applications, techniques de calcul originales...)

Question 10.77 (ID : 1127). La suite $u_n = \int_1^\infty e^{-t^n} dt$ admet-elle une limite et si oui laquelle ? Traiter l'exercice avec plusieurs méthodes : en restant dans le programme de L2, puis en se plaçant dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue.

Question 10.78 (ID : 1132). Redémontrer le théorème de Weierstrass (donner les idées, si possible de plusieurs méthodes différentes).

Question 10.79 (ID : 1138). Densité des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathcal{C}^0$ et $\mathcal{C}^1$?

Question 10.80 (ID : 1139). Démontrer Weierstrass polynomial et trigonométrique avec la convolution. Commencer par expliquer quelle approximation de l'unité on choisit.

Question 10.81 (ID : 1303). Calculer le volume de la sphère unité R de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des coordonnées sphériques, sans passer par le volume de la boule.

Calculer également l'air du tore de révolution de rayons r et R (avec $r < R$) : c'est la surface paramétrée par

$$x = (R + r \cos \phi) \cos \theta; \quad y = (R + r \cos \phi) \sin \theta, \quad z = r \sin \phi$$

Question 10.82 (ID : 1340). Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f + f'$ est dans $L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer ensuite que $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

Question 10.83 (ID : 1343). Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient dans L^2 .

1. Montrer que ff' admet une limite en l'infini, que f' est dans L^2 , et que ff' tend vers zéro en l'infini.
2. Montrer que f et f' tendent vers zéro en l'infini.
3. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f'^2\right)^2 \leq \int_{\mathbb{R}} f^2 \int_{\mathbb{R}} f''^2.$$

Question 10.84 (ID : 1355). Soient $p, q \in [1; +\infty]$ conjugués, autrement dit vérifiant $1/p + 1/q = 1$.

1. Montrer l'inégalité de Young : pour tout $a, b \geq 0$ on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2. Montrer l'inégalité de Hölder.
3. Que peut-on dire pour p et q non conjugués ?

Question 10.85 (ID : 1378). À propos du lemme de Fatou : donner plusieurs exemples, sur $\mathbb{R}$ ou sur un segment $[-1, 1]$, dans lesquels il faut bien une limite inférieure et non pas une limite.

Question 10.86 (ID : 1379). Donner des exemples d'approximations de l'unité de différents types : polynômes, polynômes trigo sur des segments, et au moins deux autres sur $\mathbb{R}$, avec des applications.

Question 10.87 (ID : 1439). Autour des polynômes de Bernstein :

- On fixe $n \geq 1$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Dessiner la fonction

$$P_{n,k} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^k(1-x)^{n-k}$$

Où se trouve son maximum ?

- Dessiner les graphes des premiers polynômes de Bernstein ($n = 2$ et $n = 3$ disons).
- Expliquer l'air de famille entre, d'une part, l'approximation d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ par des fonctions en escalier comme dans la définition de l'intégrale de Riemann (subdivision régulière de pas $1/n$), et d'autre part l'approximation de f par des sommes pondérées de polynômes de Bernstein comme dans la preuve du théorème de Weierstrass.
- Pour finir : qu'est-ce qu'une partition de l'unité ?

Question 10.88 (ID : 1523). Si une suite de fonctions convexes converge simplement vers f , est-ce que f est convexe ? La convergence est-elle uniforme sur tout compact ?

Question 10.89 (ID : 1525). Pouvez-vous nous parler de la fonction Γ ?

Question 10.90 (ID : 1538). Sur un segment, les fonctions polynomiales sont denses dans les fonctions continues. Est-ce vrai sur $\mathbb{R}$? Sinon, quelle est l'adhérence ?

Question 10.91 (ID : 1540). Démontrer le lemme de Fatou. Esquisser la preuve de la convergence dominée.

Question 10.92 (ID : 1551). Sur $[0, 1]$, toute fonction continue est limite uniforme de polynômes. Quelle est l'adhérence des polynômes pairs ? Impairs ?

Et avec un autre segment ?

Question 10.93 (ID : 1552). Soit $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ avec $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de $u_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$. Et si $f(1) = 0$?

Question 10.94 (ID : 1573). Les polynômes de Bernstein permettent (parmi d'autres choses) d'approcher uniformément une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ par une suite de polynômes P_n . Savez-vous si la suite $\|f - P_n\|_\infty$ tend rapidement vers zéro? Y a-t-il d'autres méthodes qui convergent plus vite?

Question 10.95 (ID : 1575). On munit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire $\max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$. Montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans E .

Question 10.96 (ID : 1636). Exhiber un exemple d'homéo de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ mais qui n'est pas un $\mathcal{C}^1$ -difféo.

Question 10.97 (ID : 1637). Expliquer pourquoi la convergence dans L^p n'entraîne pas la convergence presque partout si on ne permet pas d'extraire une sous-suite.

Question 10.98 (ID : 1694). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, dans L^2 et à dérivée dans L^2 .
Montrer que $f \rightarrow 0$ en l'infini.

Question 10.99 (ID : 1701). Énoncer la formule de Green-Riemann (i.e. Stokes en dimension deux), et donner son interprétation à la physicienne.

Donner l'idée de la preuve du théorème intégral de Cauchy à l'aide de cette formule (en admettant qu'une fonction holomorphe est $\mathcal{C}^1$).

Question 10.100 (ID : 1712). Donner quelques exemples « typiques » de suites de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un intervalle I (borné, ou non borné), et telles que $\lim_n \int_I f_n \neq \int_I \lim_n f_n$.

Question 10.101 (ID : 1713). Donner un exemple de suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur un intervalle I , où l'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée, mais où l'on a tout de même $\lim_n \int_I f_n = \int_I \lim_n f_n$. (Donner un exemple avec $I = \mathbb{R}$ et un autre avec $I =]0, 1[$.)

Question 10.102 (ID : 1716). Donner un exemple (ou plusieurs) de suite de fonctions intégrables $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, qui converge uniformément vers f , mais pour laquelle on ne peut pas écrire $\lim \int f_n = \int \lim f_n$.

Question 10.103 (ID : 1722). Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \cos(2\pi n! x)^{2m}$$

Question 10.104 (ID : 1798). Soit $f \in L^1 \mathbb{R}$. Démontrer que $\int_{-R}^R f(t) dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) dt$.

Question 10.105 (ID : 1815). Dessiner le graphe d'une fonction (non affine) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie le principe du maximum, et d'une autre qui ne le vérifie pas.

Question 10.106 (ID : 1828). Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f = o(g)$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec

$$f = o(h) \text{ et } h = o(g).$$

Question 10.107 (ID : 1829). Trouver une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on ait en $+\infty$:

$$\ln(x)^\alpha = o(f(x)) \text{ et } f(x) = o(x^\beta)$$

Question 10.108 (ID : 1840). Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. Montrer que $\int_0^x f(t)dt = o(\sqrt{x})$.

Question 10.109 (ID : 1841). Soit $(u_n) \in \ell^2$. Montrer que $\sum_{k=0}^n u_k = o(\sqrt{n})$.

Question 10.110 (ID : 1863). Limite en 0^+ et équivalent en $+\infty$ de $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\arctan(t)}$.
(Consolidation : donner le prochain terme non nul du DL de f en 0^+ et un développement asymptotique en $+\infty$ à la précision $o(1)$.)

Question 10.111 (ID : 1867). La fonction $\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$ intervient dans le célèbre théorème des nombres premiers. On ne peut pas l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Montrer qu'en $+\infty$, on a $\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Établir ensuite le développement asymptotique $\text{Li}(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$.

(Renforcement pour l'écrit : généraliser à un développement asymptotique à l'ordre n .)

Question 10.112 (ID : 1878). Soit f une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\arctan x}$. On ne peut pas l'écrire à l'aide des fonctions usuelles. Donner un équivalent de f en $+\infty$. Ensuite, pousser le développement asymptotique un cran plus loin. Ces développements asymptotiques dépendent-ils de la primitive que l'on a choisie ? Et si on pousse encore un cran plus loin ?

Question 10.113 (ID : 1890). Soient $a < b$ des réels. Donner un exemple de fonction lisse (c'est-à-dire de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$, prenant identiquement la valeur 0 sur $] -\infty, a]$ et la valeur 1 sur $[b, +\infty[$.

(Se ramener par changement de variable simple à un cas particulier pour lequel on peut écrire une formule explicite.)

Question 10.114 (ID : 1893). Soit $f = \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto xe^x$ et W sa bijection réciproque. Donner un développement limité de W à deux termes en zéro puis un développement asymptotique à la précision $o(1)$ en $+\infty$. (Entraînement pour l'écrit : donner les DL et DA à trois, puis quatre termes.)

Question 10.115 (ID : 1894). Il est connu que le sinus intégral $\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Donner un équivalent en $+\infty$ de $\text{Si}(x) - \frac{\pi}{2}$.

Question 10.116 (ID : 1895). La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t}$ n'a pas de primitive exprimable à l'aide des fonctions usuelles. Étudier la fonction $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$ et en donner des équivalents aux bornes de son domaine.

Question 10.117 (ID : 1897). Soit g la réciproque de $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto (x + \sqrt{x})^2$. Sans chercher à calculer g , en donner un développement asymptotique en $+\infty$ à deux termes. En l'origine, à quel ordre peut-on donner un développement limité de g ?

(Consolidation : DA à quatre termes.)

Question 10.118 (ID : 1900). Soient $n > k > 1$ des entiers. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant en l'origine un développement limité d'ordre n et dérivable k fois en zéro mais pas $k+1$ fois ?

Question 10.119 (ID : 1902). Pour une fonction polynomiale P non constante, diviser par x puis primitiver donne une fonction ayant une croissance du même ordre de grandeur que P . Ce n'est pas le cas pour d'autres fonctions. Montrer par exemple que $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ est un $o(e^x)$ en $+\infty$.

(Consolidation : en déterminer un équivalent, puis un développement asymptotique.)

Question 10.120 (ID : 1913). Déterminer un équivalent en 0^+ et en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Question 10.121 (ID : 1915). Pour $n \geq 2$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une solution $u_n < 1$ et une solution $v_n > 1$. Déterminer des équivalents de u_n et v_n en $+\infty$. (Consolidation : développements asymptotiques à trois termes.)

Question 10.122 (ID : 1917). Si $n > 0$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ a une unique solution réelle positive que l'on note x_n , et qui converge vers 1 lorsque $n \rightarrow +\infty$. (Intersecter les graphes de x^n et de $1 - x$ pour le voir.) Donner un équivalent de $1 - x_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. (Consolidation : D.A. à deux termes.)

Question 10.123 (ID : 1918). Pour $n > 0$ on note u_n la solution de $\frac{\ln x}{x} = -n$. Donner un équivalent simple de u_n .

Question 10.124 (ID : 2074). Soit f continue sur le segment $[a, b]$. Montrer que l'intégrale de f au sens de Riemann est égale à l'intégrale de f au sens de Lebesgue.

Question 10.125 (ID : 2105). Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'annulant en zéro. Montrer que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'étend en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(Variation avec contrainte : répondre en n'utilisant que des DL / Taylor-Young.)

★ ★ ★

Question 10.126 (ID : 1164). Qu'est-ce qu'un problème isopérimétrique ? Citer quelques problèmes de ce type et leur solution s'ils en admettent une.

Question 10.127 (ID : 1547). Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$, dérivables sur l'intervalle ouvert, qui converge simplement. On suppose que la suite des dérivées est bornée dans L^2 . Montrer que (f_n) converge uniformément.

Question 10.128 (ID : 1574). Les polynômes de Bernstein permettent (parmi d'autres choses) d'approcher uniformément une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0[0, 1]$ par une suite de polynômes P_n .

Si f est plus régulière, par exemple $\mathcal{C}^1$, est-ce que P_n tend vers f pour des topologies plus fines que la norme $\mathcal{C}^0$, par exemple la norme de Sobolev H^1 ou encore la norme $\mathcal{C}^1$?

Question 10.129 (ID : 1600). Peut-on définir les espaces L^p si $p < 1$? À quel type d'objet mathématique doit-on s'attendre ?

Question 10.130 (ID : 1855). Donner un exemple d'espace mesuré pour lequel les espaces L^p sont croissants.

Question 10.131 (ID : 1951). Une fonction à support compact peut-elle avoir une transformée de Fourier à support compact ?

11 Analyse : suites et séries (120 questions)

Question 11.1 (ID : 1112). On donne une suite arithmético-géométrique (par exemple par une relation comme $u_{n+1} = 2u_n + 3$ ou bien $u_{n+1} = u_n/2 + 1$, et un terme initial). Converge-t-elle, et si oui vers quoi ?

Question 11.2 (ID : 1725). Donner quelques utilisations possibles des suites adjacentes.

Question 11.3 (ID : 1747). L'équivalence sur l'ensemble suites réelles est-elle une relation d'équivalence ?

★ ★ ★

Question 11.4 (ID : 1113). On donne une suite récurrente homographique, par exemple $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2u_n - 1}$. Converge-t-elle, et si oui vers quoi ?

Question 11.5 (ID : 1114). On considère trois suites récurrentes avec récurrence linéaire donnée par une matrice 3×3 . Comment savoir si les suites convergent ? Expliquer comment étudier la situation.

Question 11.6 (ID : 1116). Que dire de la limite d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence ?

Est-ce qu'une série entière converge uniformément sur le disque (ouvert) ?

Donner des exemples.

Question 11.7 (ID : 1117). Illustrer les différentes choses qui peuvent se passer au bord du disque de convergence pour une série entière, avec un exemple à chaque fois.

Question 11.8 (ID : 1118). Donner les dix développements en série entière classiques : sinus, sinh, arctan, etc. (Premiers termes explicites, et formule pour le terme général.)

Question 11.9 (ID : 1120). Quelles méthodes existent pour déterminer le rayon d'une série entière ? Pour chaque méthode, donner un exemple où elle s'applique, et un exemple où elle ne s'applique pas (ou mal).

Question 11.10 (ID : 1121). Rayon de convergence de $\sum z^{n^2}$. Variantes avec d'autres séries « lacunaires ».

Question 11.11 (ID : 1122). Quelle est la vraie définition du rayon de convergence ? Pourquoi est-ce bien le « rayon de convergence » au sens commun ?

Question 11.12 (ID : 1128). La série de fonctions de terme général $\frac{x}{x^2 + n^2}$ converge-t-elle et de quelle manière ?

Question 11.13 (ID : 1134). Rayon de convergence et somme de $\sum \frac{z^n}{n^2}$

Question 11.14 (ID : 1313). Connaissez-vous une démonstration de l'irrationalité de e ?

Question 11.15 (ID : 1354). Expliquer sans calculs, avec un dessin, un cas où la méthode de Newton (pour approximer $f(x) = 0$) ne marche pas.

Question 11.16 (ID : 1357). Déterminer (la limite puis) un équivalent de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \arctan(u_n)$.

Question 11.17 (ID : 1359). On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 3u_n^2$, positive et convergeant vers zéro. Déterminer un équivalent de cette suite.

Ensuite, pousser le développement asymptotique un cran plus loin.

Question 11.18 (ID : 1360). On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ et convergeant vers zéro. Déterminer un équivalent de cette suite.

Question 11.19 (ID : 1417). On considère la suite récurrente $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. Donner un équivalent de u_n . Si $u_0 = 5$, montrer que l'on a $45 < u_{1000} < 45,1$.

Question 11.20 (ID : 1432). Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Question 11.21 (ID : 1433). Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.

Question 11.22 (ID : 1434). Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$.

Question 11.23 (ID : 1487). Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Développer $t \mapsto \cos(at)$ en série de Fourier.

Question 11.24 (ID : 1488). Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Question 11.25 (ID : 1671). Il est connu que $\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

Proposer plusieurs démonstrations de ce fait, avec ou sans marteau-pilon. (Attention avec les séries entières.)

Question 11.26 (ID : 1730). Question de culture générale : connaissez-vous des séries numériques dont on ne sait pas, à l'heure actuelle, si elles sont convergentes ?

Question 11.27 (ID : 1731). Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante.

Montrer que la série $\sum u_n$ et sa série « condensée » $\sum 2^n u_{2^n}$ ont la même nature.

Application : déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$.

Question 11.28 (ID : 1734). Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ lorsque a_n est le nombre de diviseurs de n , ou encore lorsque (a_n) est la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Question 11.29 (ID : 1735). Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes non nuls telle que $\left| \frac{a_{n+2}}{a_n} \right|$ soit convergente. Que dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

Et si c'est $\left| \frac{a_{n+3}}{a_n} \right|$ qui est convergente ?

Question 11.30 (ID : 1740). Soit $(u_n)_n$ une suite positive décroissante. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Et si le terme général n'est plus supposé décroissant ?

Question 11.31 (ID : 1780). Fabriquer une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui converge vers zéro très rapidement (plus vite que géométriquement), par exemple de l'ordre de $\frac{1}{2^{2^n}}$.

Question 11.32 (ID : 1781). Fabriquer une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui converge vers zéro très lentement, par exemple en $1/n$, ou en $1/\sqrt{n}$ ou plus généralement en n^α .

Question 11.33 (ID : 1785). Donner un exemple de système dynamique non trivial $u_{n+1} = f(u_n)$ avec un point fixe ni attractif, ni répulsif.

Question 11.34 (ID : 1818). Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que le système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$ admette une orbite périodique de longueur trois.

Question 11.35 (ID : 1820). Dans quel cadre l'assertion « le produit infini $\prod u_n$ converge » a-t-elle un sens, et quel est ce sens ?

Question 11.36 (ID : 1822). Que vaut $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$?

Question 11.37 (ID : 1823). Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, avec $u_n \sim v_n$. Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont-elles même nature ?

Question 11.38 (ID : 1824). Soit (u_n) une suite réelle. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \ln(1 + u_n)$ ont-elles la même nature ?

Question 11.39 (ID : 1833). Donner un exemple de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui tend vers $+\infty$ assez lentement, de l'ordre de n^α , par exemple de l'ordre $\sqrt{n}$.

Question 11.40 (ID : 1839). Une suite vérifiant une relation de récurrence géométrique « perturbée » $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + o(1)$ converge-t-elle toujours vers zéro ? De manière générale, si $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + a_n$ et que a_n tend vers l ou est borné, ou est dans ℓ^p , que dire de u_n ?

Question 11.41 (ID : 1844). Si $r_n \rightarrow \ell \in [0, 1[$, quel est le comportement de la suite récurrente $u_{n+1} = r_n u_n$? Et si $r_n \rightarrow 1$?

Question 11.42 (ID : 1849). Soient u_n et v_n des suites réelles, et notons $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$, et $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$. Si $u_n \sim v_n$ (resp. $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$), a-t-on $U_n \sim V_n$? (Resp. $U_n = O(V_n)$, $U_n = o(V_n)$?)

Question 11.43 (ID : 1871). Calculer $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$.

Question 11.44 (ID : 1874). Si $f = \sum a_n x^n$ est une série entière de rayon 1 et que $\sum a_n$ converge, le théorème d'Abel dit que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum a_n$. Démontrer ce résultat dans le cas simplifié où $(a_n)_n \in \ell^1$.

Question 11.45 (ID : 1875). Une série entière $\sum a_n x^n$ est-elle paire ssi ses coefficients impairs a_{2k+1} s'annulent ?

Question 11.46 (ID : 1896). Montrer que $\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n^{3/2}$, avec ou sans comparaison à une intégrale. Pousser le développement asymptotique un cran plus loin. (On obtient une précision en $O(1)$.)
(Consolidation : donner un DA à quatre termes, sans chercher à calculer le terme constant. Quelle utilité ceci peut-il avoir, d'un point de vue pratique ?)

Question 11.47 (ID : 1906). Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$?

Question 11.48 (ID : 1910). La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente ssi $\alpha > 1$. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n^{1+1/n}}$?

Question 11.49 (ID : 1916). Donner un équivalent de $u_n := \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$. (Consolidation : continuer le développement asymptotique à trois termes, sans chercher à « calculer » la constante.)

Question 11.50 (ID : 1941). Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$.

Question 11.51 (ID : 1964). Effectuer le DL à l'ordre deux en l'origine de $x \mapsto \frac{x}{1 - e^x}$.

Question 11.52 (ID : 1965). Vous parlez de convergence de séries numériques indexées par $\mathbb{Z}$. Qu'est-ce que cela signifie ? Montrez l'équivalence des différentes définitions possibles.

Question 11.53 (ID : 1984). Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente. Montrer que si ses termes sont positifs, la somme ne dépend pas de l'ordre de sommation. Montrer ensuite que si la série n'est pas à termes positifs mais qu'elle est absolument convergente, le résultat subsiste.

Question 11.54 (ID : 1989). Exhiber deux séries réelles convergentes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dont le produit de Cauchy soit une série divergente.

Question 11.55 (ID : 1991). Donner un exemple de fonction f réelle de variable réelle et de réel u_0 pour lesquels la méthode de Newton $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ entre en boucle infinie.

Question 11.56 (ID : 1992). Pour trouver un point d'annulation de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la méthode de Newton consiste à choisir un point u_0 (qu'on pense être relativement proche d'un point d'annulation), et à lancer le système autonome $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$.

Pourquoi ne pas simplement étudier la suite $v_{n+1} = v_n - f(v_n)$? Les points fixes de $x - f(x)$ sont bien les annulations de f . Pourquoi introduire la dérivée ?

Question 11.57 (ID : 1993). Donner un exemple de fonction f réelle de variable réelle et de réel u_0 pour lesquels la méthode de Newton $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$ diverge vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors que la fonction f a bien un point d'annulation.

Question 11.58 (ID : 1994). Que se passe-t-il si on lance la méthode de Newton pour trouver d'éventuels points d'annulation de $x \mapsto e^x$, ou bien de $x \mapsto x^2 + 1$? Et $x \mapsto \frac{\log(x)}{x}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et qui, elle, a bien un point d'annulation ?

Question 11.59 (ID : 1995). Donner un exemple de fonction dérivable $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annule quelque part et d'un réel $a \in I$ tel qu'en lançant la méthode de Newton à partir de a , on sorte du domaine de définition de la fonction.

Question 11.60 (ID : 1999). Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes. Est-ce que la série $\sum a_n b_n$ est convergente ? Si l'une des deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est absolument convergente, est-ce que la série $\sum a_n b_n$ est absolument convergente ?

Question 11.61 (ID : 2000). Soit $\sum a_n$ une série convergente et b_n une suite convergente. Est-ce que la série $\sum a_n b_n$ converge ?

Question 11.62 (ID : 2001). Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites réelles telles que $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ soient convergentes. La série $\sum a_n b_n$ est-elle convergente ? Absolument convergente ?

Question 11.63 (ID : 2003). Vous venez de sommer une série par paquets en écrivant

$$\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell = \phi(k)}^{\phi(k+1)-1} u_\ell.$$

Sous quelles hypothèses est-ce licite ?

Question 11.64 (ID : 2004). Soient (a_n) et (b_n) des suites. On suppose que (a_n) tend vers zéro et que la suite (b_n) a des sommes partielles bornées. Est-ce que la série $\sum a_n b_n$ est convergente ?

Question 11.65 (ID : 2021). Connaissez-vous un exemple concret de suite numérique dont on ne sache pas, à l'heure actuelle, si elle est convergente ?

Question 11.66 (ID : 2026). Connaissez-vous un exemple de série numérique qui converge vers $\ln(3)$? Avec quelle vitesse de convergence ?

Question 11.67 (ID : 2028). Si $u_n \sim 2^n$, est-ce que u_n est croissante (à pcr) ? Et si $u_n \sim n^2$? Que peut-on dire en général ?

Question 11.68 (ID : 2061). À l'aide d'une comparaison série-intégrale, établir un développement asymptotique de $\ln n!$ à la précision $O(\ln n)$. Que peut-on en déduire sur $n!$? En poussant le développement asymptotique plus loin, peut-on récupérer l'équivalent de Stirling ?

Question 11.69 (ID : 2062). Déterminer des équivalents simples de $\sum_{k=0}^n k^k$ et de $\sum_{k=0}^n n!$.

Question 11.70 (ID : 2145). On désire utiliser le théorème du point fixe de Banach pour prouver l'existence d'un unique point fixe de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x}$ et approximer ce point fixe par itération. Comment faire ?

Question 11.71 (ID : 2146). On désire utiliser le théorème du point fixe de Banach pour montrer que $x \mapsto \cos(x)$ a un point fixe. Comment procéder ?

★ ★ ★

Question 11.72 (ID : 1098). Calculer $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^4}$ avec des séries de Fourier.

Question 11.73 (ID : 1099). À quoi diriez-vous que servent les séries de Fourier ? Sans développer ni entrer dans les détails, quels exemples marquants viennent en tête ? Citer deux théorèmes, deux contre-exemples, et deux applications.

Question 11.74 (ID : 1308). Développer la fonction $t \mapsto \frac{1}{2 - \cos t}$ en série de Fourier.

Question 11.75 (ID : 1376). La transformée de Fourier sur L^1 est-elle injective ?

Question 11.76 (ID : 1418). Comportement et équivalent de la suite récurrente $u_{n+1} = u_n - e^{-1/u_n}$ (et $u_0 > 0$) ? La convergence est-elle rapide, lente, très lente ?

Question 11.77 (ID : 1447). Montrer la réciproque partielle de Cesàro suivante (« Hardy faible ») : si la moyenne de Cesàro converge vers $l \in \mathbb{R}$ et que de plus $u_{n+1} - u_n = o(1/n)$, alors u_n converge. (Il y a une version forte avec un grand O au lieu d'un petit o .)

Question 11.78 (ID : 1539). Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$. Déterminer son ensemble de définition, étudier la dérivabilité, les limites aux bornes du domaine.

Question 11.79 (ID : 1541). Soient $f = \sum a_n x^n$ et $g = \sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon infini. Si $a_n = o(b_n)$, est-ce que $f = o(g)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$?

Question 11.80 (ID : 1604). Quelle est l'interprétation physique de l'identité de Parseval ?

Question 11.81 (ID : 1609). Donner un exemple de série entière qui converge sur tout le cercle d'incertitude sauf en un point. Ensuite, un autre exemple qui converge partout sauf en N points. Est-il possible qu'une série entière ne converge qu'en un seul point du cercle ?

Question 11.82 (ID : 1672). Que répondre à quelqu'un ayant lu sur internet que la somme des entiers naturels valait $-1/12$, en étant (bienveillant et) constructif ? Proposer des réponses à plusieurs niveaux (lycée, L3, M1 par exemple).

Question 11.83 (ID : 1736). (Approximation du Dirac) Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. Limite puis équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $u_n := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+n^2 t^2} dt$?

Question 11.84 (ID : 1737). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon 1 dont la somme coïncide avec f sur $] -1, 1[$. Est-ce que $\sum a_n$ converge et vaut $f(1)$? Et si l'on présuppose que la série converge ? Illustrer. Connaissez-vous des conditions suffisantes pour que ce soit le cas ?

Question 11.85 (ID : 1795). Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = x - cx^\alpha + o(x^\alpha)$ au voisinage de l'origine, avec $\alpha > 1$. Décrire le comportement de la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

Question 11.86 (ID : 1800). On considère $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ convergeant vers un point fixe l attractif qui vérifie $0 < |f'(l)| < 1$. Est-il vrai que $u_n - l \sim K \cdot f'(l)^n$ ou bien faut-il que f soit deux fois dérivable au voisinage de l ?

Question 11.87 (ID : 1819). Donner des exemples de fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, et telles que 0 soit un point fixe attractif ou bien répulsif du système dynamique $u_{n+1} = f(u_n)$.

Question 11.88 (ID : 1825). Soit $(u_n)_n$ une suite de réels > -1 . La convergence du produit infini $\prod (1+u_n)$ est-elle équivalente à celle de la série $\sum u_n$, ou bien à celle de la série $\sum \log(1+u_n)$? Et pour la convergence absolue ?

Question 11.89 (ID : 1826). Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres complexes de module < 1 . La convergence du produit infini $\prod (1+u_n)$ est-elle équivalente à celle de la série $\sum \log(1+u_n)$, avec log la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$?

Question 11.90 (ID : 1830). Sur le sinus itéré : si u_n vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on sait qu'on a le développement asymptotique à deux termes

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right).$$

Est-il normal qu'on ne voie pas apparaître le terme initial u_0 ? Savez-vous ce qu'il se passe si on pousse le développement asymptotique un cran plus loin ?

Question 11.91 (ID : 1831). Sur le sinus itéré : si u_n vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$, vous avez montré que

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right).$$

Expliquer comment on pourrait obtenir sans efforts supplémentaires la version améliorée suivante :

$$u_n = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}} - \frac{3\sqrt{3}}{10} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

Question 11.92 (ID : 1834). Donner un exemple de suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ qui tend vers $+\infty$ très lentement, de l'ordre de $\log n$.

Question 11.93 (ID : 1846). Quel est le comportement de la suite récurrente $u_{n+1} = 2u_n^2 - 1$ suivant les valeurs de u_0 ?

Approfondissement : on peut utiliser des formules classiques de trigo (ou trigo hyperbolique) pour écrire le terme général sous forme d'une formule close. Expliquer. Que donne la méthode pour $u_{n+1} = 2 - u_n^2$? Savez-vous si cette méthode marche en général pour toutes les récurrences $u_{n+1} = P(u_n)$ avec P un polynôme de degré 2 ? De degré supérieur ?

Question 11.94 (ID : 1856). Que dire de la transformée de Fourier d'un élément de L^1 ?

Question 11.95 (ID : 1857). Que dire d'une fonction qui, convolée à elle-même, est nulle ?

Question 11.96 (ID : 1869). Soient $f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon infini. Si $a_n \sim b_n$, est-ce que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \mapsto +\infty$?

Question 11.97 (ID : 1872). On considère la série de fonctions $f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + x^2}$. Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

Question 11.98 (ID : 1891). Donner un exemple de suite réelle non nulle $(a_n)_n$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon infini et admette une limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$.

Question 11.99 (ID : 1892). Soient $f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$ deux séries entières de rayon infini. Si $a_n = o(b_n)$, est-ce que $f = o(g)$ au voisinage de $+\infty$? Même question pour $a_n = O(b_n)$ et $f = O(g)$.

Question 11.100 (ID : 1904). Donner un exemple de série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R = 1$, de somme f sur $] -1, 1[$, telle que f admette une limite finie lorsque $x \rightarrow 1^-$, mais sans qu'on puisse écrire que $\sum a_n = f(1)$.

Question 11.101 (ID : 1911). On considère la somme f de la série entière $\sum z^{n^2}$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x est un réel qui tend vers 1^- .

Question 11.102 (ID : 1912). On considère la somme f de la série entière $\sum z^{2^n}$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x est un réel qui tend vers 1^- .

Question 11.103 (ID : 1914). Soit (u_n) une suite réelle vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\ln u_n}$. Déterminer un équivalent de u_n en $+\infty$. (Consolidation : développement asymptotique à deux termes.)

Question 11.104 (ID : 1966). Écrire le noyau de Fejér sous forme simplifiée (quotient de sinus), ou sous forme de polynôme trigonométrique.

Question 11.105 (ID : 1967). Soient f et g deux fonctions continues 2π -périodiques ayant les mêmes coefficients de Fourier. Que peut-on dire ?

Question 11.106 (ID : 1968). Donner l'idée de preuve de l'égalité de Parseval.

Question 11.107 (ID : 1979). Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Question 11.108 (ID : 1980). Vous avez évoqué que $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum n^{-n}$. Savez-vous démontrer ce résultat ?

Question 11.109 (ID : 1985). Exhiber un exemple explicite de série pour laquelle changer l'ordre de sommation conduit à deux limites différentes (que l'on calculera).

Question 11.110 (ID : 1986). Les familles suivantes sont-elles sommables sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$?

$$\frac{1}{(n+m)^2}, \quad \frac{1}{(n+m)^3}, \quad \frac{1}{n^2+m^2}, \quad \frac{1}{n^3+m^3}, \quad \frac{1}{mn(n+m)}.$$

Question 11.111 (ID : 1987). Pour quels paramètres $\alpha \in \mathbb{R}$ les familles suivantes sont-elles sommables sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$?

$$\frac{1}{(n+m)^\alpha}, \quad \frac{1}{n^\alpha + m^\alpha}, \quad \frac{1}{(n^2 + m^2)^\alpha}, \quad \frac{nm}{(m+n)^\alpha}.$$

Question 11.112 (ID : 1988). Exhiber une famille $(u_p, q)_{p,q \in \mathbb{N}}$ de réels telle que $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$ et

$\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$ soient bien définies dans $\mathbb{R}$ mais aient des valeurs différentes.

Construire un autre exemple pour lequel une des deux sommes existe mais pas l'autre.

Question 11.113 (ID : 2002). La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ est-elle convergente ? Et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$?

Question 11.114 (ID : 2006). Soit $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$ la suite 4-périodique commençant par 1, 1, -1, -1. Proposer plusieurs méthodes pour calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$.

Question 11.115 (ID : 2052). Sur les nombres de Bell : a posteriori, quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$?

Question 11.116 (ID : 2060). On prend la série semiconvergente $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ et on réarrange la sommation en alternant un terme positif et deux négatifs :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

La nouvelle série converge-t-elle ? Vers quoi ?

Et si l'on fixe des entiers $a, b \geq 1$ et que l'on réarrange en alternant a termes positifs et b termes négatifs ?

Question 11.117 (ID : 2109). Quelle est la limite de $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x/n}}{x+1} dx$? Développement asymptotique ?

Question 11.118 (ID : 2110). On considère la série de fonctions sur $\mathbb{R}_+$ définie par

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

Que dire de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

★ ★ ★

Question 11.119 (ID : 1272). Que savez-vous de $\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$? Irrationalité, transcendance, nom ... ?

Question 11.120 (ID : 1963). Dans votre développement, vous avez calculé les $\zeta(2k)$ en fonction des nombres de Bernoulli. À quoi sert ce résultat ? Savez-vous calculer les nombres de Bernoulli de manière directe ? Par exemple B_2 ? B_3 ? Comment calculer ces nombres en pratique ?

12 Analyse : équations différentielles (48 questions)

Question 12.1 (ID : 1336). Donner un exemple d'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ avec un ensemble de solutions vide.

Question 12.2 (ID : 1337). Donner des exemples d'équations différentielles linéaires d'ordre deux homogènes dont l'ensemble de solutions est de dimension 0, 1 et 2.

Question 12.3 (ID : 1338). Résoudre l'équation $(e^t - 1)y' + e^t y = 1$, en prenant soin à la justification des arguments de recollement.

Question 12.4 (ID : 1345). Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \tan(t)$$

Question 12.5 (ID : 1346). Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3t}}{1 + e^t}$$

avec les conditions $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Question 12.6 (ID : 1347). Résoudre sur $] -2; 1[$ l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(t-1)(t+2)}$$

Avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Question 12.7 (ID : 1375). Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que toute solution non constante de $y' = f(y)$ est strictement monotone.

Question 12.8 (ID : 1384). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue périodique. Les solutions de $y' + \alpha y = \phi$ sont-elles périodiques ? Certaines ?

Question 12.9 (ID : 1416). Parmi les équations différentielles classiques, il y a les équations de Bernoulli, de Ricatti, d'Euler, etc. Connaissez-vous des contextes où ces équations apparaissent ? (Par exemple en physique, mais pas forcément.)

Question 12.10 (ID : 1456). À quoi sert le wronskien ? A-t-il une interprétation physique ?

Question 12.11 (ID : 1632). Le théorème de Cauchy-Lipschitz parle de fonction localement lipschitzienne. Connaissez-vous une fonction localement Lipschitz mais pas Lipschitz ? (Même à une variable.) Et une fonction non localement Lipschitz ?

Question 12.12 (ID : 1633). Donner un exemple d'équation différentielle du premier ordre pour laquelle il existe plusieurs solutions sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 0$.

Question 12.13 (ID : 1634). Étudier les équations différentielles $y' = \sqrt{y}$, $y'^2 = y$ et $y' = \sqrt{|y|}$, en particulier déterminer à chaque fois l'ensemble des solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Question 12.14 (ID : 1635). Étudier les équations différentielles $y' = \sqrt{1 - y^2}$ et $y'^2 = 1 - y^2$, en particulier déterminer à chaque fois l'ensemble des solutions vérifiant $y(0) = 0$.

Question 12.15 (ID : 1642). Dessiner les solutions de $y' = y^3 - y$.

Question 12.16 (ID : 1647). Dessiner l'allure des solutions de $y' = x/y$ et $y' = -x/y$. Les solutions maximales sont définies sur quel intervalle ?

Question 12.17 (ID : 1761). Expliquer comment fabriquer des EDO non linéaires, à variables séparables, qu'il est ensuite possible de résoudre explicitement. Donner des exemples.

Question 12.18 (ID : 1763). Donner un exemple d'EDO définie sur $\mathbb{R}$, avec une solution maximale mais non globale.

Question 12.19 (ID : 1764). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable avec $f' \leq f$. Montrer que $\forall t \geq 0, f(t) \leq f(0)e^t$.

Question 12.20 (ID : 1799). Donner un exemple d'edo linéaire homogène de degré n avec un espace de solutions de dimension $< n$.

Question 12.21 (ID : 1939). Dessiner l'allure et étudier les solutions de l'équation différentielle $y' + y - y^2 = 0$ et leur comportement asymptotique.

Question 12.22 (ID : 2106). Les graphes des solutions d'une équation différentielle forment-ils une partition du plan ?

★ ★ ★

Question 12.23 (ID : 1341). Soit $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue non identiquement nulle. Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

s'annule.

Question 12.24 (ID : 1342). Soit $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'une solution non nulle de l'équation

$$y''(t) + p(t)y(t) = 0$$

ne peut pas s'annuler une infinité de fois sur un intervalle borné.

Plus généralement, montrer qu'une solution non nulle d'une ED linéaire homogène (à coefficients non forcément constants) a ses zéros isolés.

Question 12.25 (ID : 1344). Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ obtenue en prolongeant par continuité en zéro la fonction $t \mapsto e^{-1/t^2}$. Montrer que f ne peut être solution sur $\mathbb{R}$ d'aucune équation différentielle homogène $y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ (à coefficients continus).

Question 12.26 (ID : 1348). Soit $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ continue et considérons l'équation $y'' + f(t)y = 0$.

1. Montrer qu'une solution bornée a une dérivée qui tend vers zéro en $+\infty$.
2. Soient u et v deux solutions. Montrer que leur Wronskien est constant. En déduire que l'équation possède des solutions non bornées.

Question 12.27 (ID : 1349). On considère une équation différentielle linéaire $y'' + py' + q = 0$, à coefficients variables. On rappelle que les zéros d'une solution non nulle sont isolés, et que le Wronskien de deux solutions est nul ou bien ne change pas de signe.

Soient f et g deux solutions indépendantes. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f , la fonction g s'annule (exactement une fois).

Question 12.28 (ID : 1370). On se donne une équation différentielle sur $\mathbb{R}$. Est-il possible d'avoir deux solutions y_1 et y_2 arbitrairement proches à $t = 0$, et ayant des limites différentes en $+\infty$? Discuter suivant le type d'équation et illustrer.

Question 12.29 (ID : 1371). On considère les deux équations différentielles $(E_1) \quad y' = y^2$ et $(E_2) \quad y' = y^2 + 1$. Discuter d'abord du comportement des solutions, puis résoudre explicitement ces équations.

Question 12.30 (ID : 1372). Soit $t \mapsto y(t)$ une solution maximale de $y' = y^2 - 1$, telle que $y(0) = 0$. Montrer que y est définie sur $\mathbb{R}$.

Question 12.31 (ID : 1373). Montrer que toutes les solutions maximales de $y' = 1 + \sin(y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Question 12.32 (ID : 1374). Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et solution d'une équation différentielle $y' = F(y, t)$, avec F continue, et localement Lipschitz en la première variable. Montrer

$$f(t_0) < g(t_0) \implies \forall t \in \mathbb{R}, f(t) < g(t)$$

Question 12.33 (ID : 1377). Donner quelques exemples de résolution d'équations différentielles à l'aide d'une transformée de Fourier.

Question 12.34 (ID : 1410). Soit $g \in C^0[0, 1]$, et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation $y'' = g$ avec les conditions $y(0) = a$ et $y(1) = b$, de façon élémentaire. Si $g \in L^2[0, 1]$, comment faire?

Question 12.35 (ID : 1641). Soit ϕ une fonction C^∞ à support compact et soit f la solution de l'EDO $y' + y = \phi$ qui vérifie $y(t) \equiv 0$ pour $t \rightarrow -\infty$. À quoi ressemble f pour t grand? Calculer f .

Question 12.36 (ID : 1643). Dessiner l'allure des solutions de $y' = y^2 - x$.

Question 12.37 (ID : 1644). Dessiner l'allure des solutions de $y' = y^2 - x^2$.

Question 12.38 (ID : 1646). [Mini Gronwall] Soit $a \in C^0(\mathbb{R})$, et A sa primitive s'annulant en zéro. Soit f une fonction C^1 telle que $f'(t) \leq a(t)f(t)$. Montrer que $f(t) \leq f(0)e^{A(t)}$ pour $t \geq 0$.

Question 12.39 (ID : 1759). Donner plusieurs exemples d'EDO autonomes $X' = f(X)$ avec un équilibre à l'origine attractif/stable/instable/répulsif, dans des situations où le critère de linéarisation de Liapounov ne s'applique pas (c'est-à-dire $Df(0)$ avec valeurs propres de partie réelle nulle).

Question 12.40 (ID : 1766). On prolonge $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ en une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Expliquer ce que font les solutions de $y' = f(y)$ près de l'origine.

Question 12.41 (ID : 1779). On considère une équadiff (E) définie sur $\mathbb{R}$ d'ordre un avec une singularité en zéro, par exemple $ty' + a(t)y = b(t)$, les fonctions a et b étant continues sur $\mathbb{R}$. Supposons que l'on arrive à recoller deux solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ en une fonction $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Cette fonction est-elle automatiquement solution de (E) ou bien reste-t-il quelque chose à vérifier?

Question 12.42 (ID : 1794). On considère une équation différentielle autonome $y' = f(y)$, avec $f > 0$. À quelle condition les solutions explosent-elles en temps fini ?

Question 12.43 (ID : 1827). Les solutions de $y' = \alpha y$ sont à croissance exponentielle (si $\alpha > 0$). Les solutions de $y' = y^2$ explosent en temps fini. Avez-vous un exemple d'EDO dont les solutions sont définies sur tout $\mathbb{R}$ et ont une croissance sur-exponentielle ?

Question 12.44 (ID : 1847). On considère l'équation différentielle $y' + y = g$ en temps positif (disons sur $\mathbb{R}_+$). Si g est bornée, ou bien si $g \in L^p(\mathbb{R}_+)$, ou encore si $g = O(t^\alpha)$, en est-il de même des solutions de l'équation ? De manière générale, si y est une solution, a-t-on $y = O(g)$?

Question 12.45 (ID : 1848). Soit $\phi \in C^0(\mathbb{R})$. S'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\phi \geq \epsilon$, montrer que les solutions de $y' + \phi y = 0$ tendent vers zéro en $+\infty$. Et si on a seulement $\phi > 0$?

Question 12.46 (ID : 1850). Pour tout $f \in C^0(\mathbb{R})$ on note (E_f) l'équation différentielle $y' + y = f$. Si $f = O(g)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ (resp. $f = o(g)$), les solutions de (E_f) sont-elles en grand O (resp. petit o) de celles de (E_g) ?

Question 12.47 (ID : 1926). Que dire des variations d'une solution de $y'' = -t^2 y$?

Question 12.48 (ID : 1940). Résoudre $y(y - y') = t$. Quels sont les intervalles maximaux de résolution et quel est le comportement des solutions ?

13 Arithmétique (53 questions)

Question 13.1 (ID : 1221). Appliquer l'algorithme d'Euclide étendu sur un exemple.

Question 13.2 (ID : 1516). Combien de diviseurs possède le nombre 360 ?

De façon générale, quel est le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$?

Question 13.3 (ID : 1721). Montrer qu'il n'y a pas de carrés parfaits dans l'ensemble $\{3, 7, 11, 15, 19, \dots\}$.

★ ★ ★

Question 13.4 (ID : 1003). Trouver tous les éléments de $\mathbb{U}$ dont les parties réelles et imaginaires sont des rationnels. Application à l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = z^2$?

Question 13.5 (ID : 1028). Déterminer tous les morphismes de groupes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Même chose pour les morphismes d'anneaux.

Question 13.6 (ID : 1059). Comment calcule-t-on les indicatrices d'Euler $\phi(n)$? Par exemple, combien vaut $\phi(72)$?

Existe-t-il un moyen algorithmiquement efficace de calculer les indicatrices d'Euler ?

Question 13.7 (ID : 1067). Dans le théorème chinois, comment trouver un isomorphisme inverse ? Par exemple,

$$(n \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } n \equiv 2 \pmod{3}) \iff (n \equiv ??? \pmod{12})$$

Question 13.8 (ID : 1193). Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de deux. Les nombres de Fermat sont les entiers de la forme $F_k := 2^{2^k} + 1$. Fermat conjectura qu'ils étaient tous premiers mais Euler finit par démontrer en 1732 que F_5 est divisible par 641. Comment peut-on démontrer ce résultat ?

(Remarque : c'est la seule conjecture erronée de Fermat !)

Question 13.9 (ID : 1194). Montrer que si le n -ème nombre de Mersenne $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. Connaissez-vous une condition nécessaire et suffisante pour que M_n soit premier ?

Question 13.10 (ID : 1206). Résoudre l'équation diophantienne $4x + 5y = 2$. Interprétation en termes de $\mathbb{Z}$ -modules et d'applications $\mathbb{Z}$ -linéaires ?

Question 13.11 (ID : 1208). Illustrer le principe de descente infinie, si possible de plusieurs façons.

Question 13.12 (ID : 1222). Deux nombres de Fermat sont-ils premiers entre eux ?

Question 13.13 (ID : 1422). Quel est le lien entre l'indicatrice d'Euler et le théorème chinois ?

Question 13.14 (ID : 1424). Expliquer RSA.

Question 13.15 (ID : 1425). Démontrer le théorème de Wilson. À quoi sert-il en théorie ? En pratique ?

Question 13.16 (ID : 1471). Soient n et m deux entiers naturels et ϕ l'indicatrice d'Euler. Est-ce que $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$?

Question 13.17 (ID : 1503). Montrer qu'il existe une infinité de premiers de la forme $3n + 2$.

Question 13.18 (ID : 1513). Montrer que dans tout triplet pythagoricien, il y a au moins un multiple de cinq.

Question 13.19 (ID : 1666). On veut calculer a^{300} modulo N . Expliquer comment faire ceci rapidement en utilisant l'exponentiation rapide, par exemple pour $a = 3$ et $N = 500$ (exemple au hasard).

Question 13.20 (ID : 1723). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le n -ème nombre harmonique $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est un entier que si $n = 1$.

Question 13.21 (ID : 1758). Déterminer tous les entiers strictement positifs n pour lesquels il existe un rectangle à côtés entiers et dont le périmètre et l'aire sont égaux à n .

Question 13.22 (ID : 1903). Quel est le coût de stockage de l'algorithme d'Euclide généralisé ?

Question 13.23 (ID : 1920). Résoudre $x^2 = 29 \pmod{35}$.

★ ★ ★

Question 13.24 (ID : 1073). Quels sont les entiers de Gauss premiers ?

Question 13.25 (ID : 1091). 13 est-il somme de deux carrés ? Et 19 ? Et 7000 ? (On demande une réponse relativement rapide, pas forcément la décomposition effective en deux carrés.)

Question 13.26 (ID : 1092). Le théorème des deux carrés de Fermat (prouvé par Euler) dit qu'un nombre premier p est une somme de deux carrés ssi $p \equiv 1 \pmod{4}$. (On peut en déduire qu'un nombre n est somme de deux carrés ssi ses facteurs premiers congrus à $3 \pmod{4}$ apparaissent avec multiplicité paire.)

Mais en pratique, comment trouver ces deux carrés ? Par exemple, 193 est un nombre premier somme de deux carrés : lesquels ?

Question 13.27 (ID : 1094). Résoudre sur $\mathbb{N}$ puis sur $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + xy + y^2 = 19$. Que dire de l'équation diophantienne $x^2 + xy + y^2 = 17$, ou de $x^2 + xy + y^2 = p$ avec p un nombre premier en général ?

Question 13.28 (ID : 1179). Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet (1838) affirme que si a et b sont premiers entre eux, il existe une infinité de premiers congrus à a modulo b . Sans utiliser ce théorème, montrer de façon élémentaire qu'il y a une infinité de premiers congrus à 3 modulo 4, ainsi qu'une infinité de premiers congrus à 1 modulo 4 (un peu moins immédiat).

Variations possibles : 2 modulo 3, puis 1 modulo 3 (là aussi, un peu moins immédiat que le précédent).

Peut-on prouver facilement qu'il existe une infinité de premiers congrus à 4 modulo 5 ?

Question 13.29 (ID : 1199). (Inspiré du bac 2017) On cherche à construire des triangles rectangles « presque isocèles » à côtés entiers, où presque isocèle signifie que les deux côtés sont de mesure x et $x + 1$. (Et l'hypoténuse de côté y .) Ceci correspond à l'équation suivante :

$$2x^2 + 2x + 1 = y^2$$

Résoudre le plus possible cette équation.

Question 13.30 (ID : 1205). Citer ou trouver quelques triplets pythagoriciens. Proposer des méthodes pour en trouver plus. Y a-t-il une méthode pour les énumérer de façon exhaustive ?

Question 13.31 (ID : 1207). Résoudre l'équation diophantienne $6x + 10y + 15z = 1$.

Question 13.32 (ID : 1209). Résoudre sur $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + 2y^2 = 9$. Même question pour $x^2 + 2y^2 = 6$.

Question 13.33 (ID : 1287). Soit $p > 3$ un premier. Montrer qu'il existe x tel que $x^2 = -3$ dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod{3}$:

1. en utilisant la réciprocité quadratique ;
2. sans l'utiliser.

Question 13.34 (ID : 1423). Démontrer le petit théorème de Fermat de plusieurs façons, dont une avec une action de groupe si possible.

Question 13.35 (ID : 1504). À propos du théorème de Dirichlet faible : faire la preuve pour le cas particulier $n = 3$, en simplifiant la preuve générale lorsque c'est possible. (Autrement dit montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 3.)

Question 13.36 (ID : 1520). À propos de Dirichlet faible : pourquoi doit-on introduire des polynômes cyclotomiques, et pourquoi ne peut-on pas simplement adapter la preuve classique d'Euclide, en considérant la quantité $\prod p_i + 1$?

Question 13.37 (ID : 1582). Expliquer comment généraliser la décomposition en éléments simples sur $k(X) = \text{Frac}(k[X])$ à $\mathbb{Q} = \text{Frac}(\mathbb{Z})$. Faire la preuve dans ce cas. À quoi cela peut-il servir ?

Question 13.38 (ID : 1757). Donner des exemples d'équations diophantiennes à deux variables de degré deux ayant un ensemble de solutions (entières) vide, fini non vide, ou infini. (Y a-t-il des théorèmes généraux ?)

Question 13.39 (ID : 1907). On cherche des triangles à côtés entiers et possédant un angle de 60° . Y en a-t-il beaucoup ? Comment faire pour en trouver ?

Question 13.40 (ID : 1933). Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Question 13.41 (ID : 1972). En admettant que l'on ait une solution x_0 de $x^2 = a$ modulo p , expliquer comment utiliser cette solution pour trouver des solutions de $x^2 = a$ modulo p^2 , qui soient congrues à x_0 modulo p .

Question 13.42 (ID : 2068). Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $8k + 7$.

Question 13.43 (ID : 2069). Pour quels nombres premiers p le nombre 5 est-il un carré modulo p ? (En utilisant la réciprocity quadratique, ou sans l'utiliser, à la main.)

Question 13.44 (ID : 2070). Pour quels nombres premiers p le nombre 2 est-il un carré modulo p ?

Question 13.45 (ID : 2073). Question de culture gé : pouvez-vous énoncer (même approximativement) le théorème des nombres premiers? Savez-vous quand et par qui il a été démontré? Avez-vous une idée des techniques mises en jeu pour le démontrer?

★ ★ ★

Question 13.46 (ID : 1087). Qu'est-ce qui est étonnant dans la loi de réciprocity quadratique? Expliquer avec des exemples.

Question 13.47 (ID : 1187). Existe-t-il des encadrements simples de la fonction indicatrice d'Euler $\phi(n)$? Des équivalents, ou des estimations asymptotiques?

Question 13.48 (ID : 1196). Soit p un premier impair, ζ_p une racine p -ème primitive de l'unité, et a premier avec p . On note $\tau(a)$ la somme de Gauß :

$$\tau(a) = \sum_{k=0}^{p-1} \zeta_p^{ak^2}.$$

1. Pour $p = 7$, calculer toutes les sommes de Gauß, sous forme de somme de racines de l'unité, sans chercher la valeur « exacte » : que constate-t-on?
2. Montrer que $\tau(a) = \left(\frac{a}{p}\right) \tau(1)$. (Symbole de Legendre)
3. Montrer que $|\tau(a)|^2 = p$.
4. Montrer que $\tau(1)^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p$.
5. En déduire que $\tau(1) = \pm\sqrt{p}$ si $p \equiv 1 \pmod{4}$ et $\tau(1) = \pm i\sqrt{p}$ si $p \equiv 3 \pmod{4}$.

En fait les signes sont positifs mais ceci est plus délicat et apparaît lors de la preuve de la réciprocity quadratique.

Question 13.49 (ID : 1239). Préciser la fonction qui à un nombre premier p associe le symbole de Legendre $\left(\frac{3}{p}\right)$.

Question 13.50 (ID : 1242). Le test de primalité des nombres de Mersenne dit que $M_n = 2^n - 1$ est premier ssi $(2 + \sqrt{3})^{2^{n-1}} \equiv -1 \pmod{M_n}$. Est-il utilisable en pratique?

Énoncer le corollaire avec la suite récurrente de Lucas. Démontrer le corollaire. Quelle est la complexité du test de primalité? Preuve.

Question 13.51 (ID : 1243). Existe-t-il un test de primalité pour les nombres de Fermat comparable à celui de Lucas-Lehmer pour les nombres de Mersenne? Est-il plus facile ou plus difficile à démontrer?

Question 13.52 (ID : 2149). Complétons $\mathbb{Q}$ pour la métrique p -adique. On obtient un espace métrique complet. Connaissez-vous des applications contractantes, ou des exemples d'application du théorème du point fixe de Banach dans ce contexte?

★ ★ ★

Question 13.53 (ID : 1102). Le théorème des deux carrés (énoncé par Fermat et prouvé par Lagrange) décrit les nombres entiers qui sont des sommes de deux carrés. D'autre part, dans un corps fini, on peut montrer que tout élément est somme de deux carrés.

Que sait-on dire pour les sommes de cubes ?

14 Calcul différentiel (32 questions)

Question 14.1 (ID : 1224). Parmi les parallélépipèdes rectangles de surface S , lesquels ont un volume maximal ?

Question 14.2 (ID : 1225). Faire un dessin pour illustrer les extrema liés. En pratique, comment maximiser une fonction avec ce théorème ?

Question 14.3 (ID : 1226). Maximum de $f(x, y) := x + y$ sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 = 4\}$? Dessin ?

Question 14.4 (ID : 1299). Calculer l'expression du gradient et de la divergence en coordonnées polaires. Esquisser le calcul pour le laplacien.

Question 14.5 (ID : 1414). Expliquer sur un exemple pourquoi le théorème des accroissements finis est faux pour des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Question 14.6 (ID : 1441). Résoudre $2\partial_x f - 3\partial_y f = 0$ en faisant juste un dessin.

Question 14.7 (ID : 1484). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{xy} + 3x - 2y + 1$. Montrer que la courbe $f = 0$ passe par $(0, 1)$, qu'au voisinage de ce point on peut l'écrire comme le graphe d'une fonction c'est-à-dire $y = g(x)$, et donner le DL d'ordre deux de g en l'origine.

Question 14.8 (ID : 1490). Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique à l'aide des extrema liés.

Question 14.9 (ID : 1527). Donner la différentielle de $X \mapsto \langle MX, X \rangle$.

Question 14.10 (ID : 1563). Déterminer le maximum global de xy^2 sous la contrainte $2x^2 + 3y^2 = 6$, ainsi que les points où il est atteint. Faire un dessin.

Question 14.11 (ID : 1564). Déterminer les extrema locaux et globaux de $x^2 + 4y^2$ sous la contrainte $xy = 2$. Proposer deux méthodes, avec les extrema liés ou pas. Faire un dessin.

Question 14.12 (ID : 1868). Donner un exemple de fonction à deux variables admettant des dérivées partielles en l'origine, mais non différentiable en l'origine.

Question 14.13 (ID : 1934). En restriction à la partie $\{x^3 + y^3 = 2\} \subseteq \mathbb{R}^2$, la fonction $(x, y) \mapsto x + y$ est-elle majorée, minorée ? Atteint-elle ses bornes et si oui, en quels points ?

Question 14.14 (ID : 1953). Soit f une fonction assez régulière sur $\mathbb{R}^n$. Donner un critère suffisant pour avoir un minimum en un point, et le démontrer.

Question 14.15 (ID : 2114). On considère la fonction $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \exp(n+1 - \sum (x_k)) + \sum (\exp(x_k))$. Étudier l'existence et la nature des points critiques de cette fonction.

★ ★ ★

Question 14.16 (ID : 1082). Donner un exemple de forme différentielle fermée et non exacte.

Question 14.17 (ID : 1367). Donner un exemple de fonction qui vérifie les hypothèses du théorème d'inversion locale en tout point, mais qui n'est pas bijective.

En quelle dimension est-il possible de construire un tel exemple ?

Question 14.18 (ID : 1435). Soit Φ l'application qui à une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ associe sa partie diagonalisable (le « D » de la décomposition « $D + N$ » de Jordan-Chevalley. Est-ce que Φ est continue ?

Même question sur $M_n(\mathbb{R})$. (Qui est D dans ce contexte ?)

Question 14.19 (ID : 1480). Associer à une matrice carrée réelle son polynôme caractéristique, ou bien son polynôme minimal, est-ce continu ?

Question 14.20 (ID : 1482). Soit A une matrice inversible. Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est définie, continue et différentiable au voisinage de A . Peut-on dire plus ?

Question 14.21 (ID : 1483). Idée de démonstration du théorème d'inversion locale / des fonctions implicites ?

Question 14.22 (ID : 1562). Une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ peut ne pas posséder de racine carrée, ou en posséder plusieurs. Expliquer pourquoi si M est « proche » de l'identité, on a existence et unicité d'une racine carrée « proche » de l'identité.

Question 14.23 (ID : 1630). On place n points sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Montrer que le périmètre du n -gone convexe obtenu est maximal lorsque le polygone est régulier.

Question 14.24 (ID : 1711). Calculer de plusieurs façons la différentielle de $M \mapsto M^{-1}$ sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$.

Question 14.25 (ID : 1726). Soit $t \mapsto A(t)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$. Est-il vrai que la dérivée de $t \mapsto e^{A(t)}$ est $t \mapsto A'(t)e^{A(t)}$?

Question 14.26 (ID : 1792). On sait que l'exponentielle matricielle est un homéo local au voisinage de l'origine. Est-ce le cas au voisinage d'une autre matrice ?

Question 14.27 (ID : 1885). L'exponentielle matricielle réelle est-elle un difféomorphisme local ?

Question 14.28 (ID : 1954). Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue convexe, telle que $f(x) \geq \|x\|^2$. Montrer que f admet un minimum. Est-il atteint en un unique point ? Critère suffisant pour que ça soit le cas ?

Question 14.29 (ID : 1955). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue convexe. On la restreint à la boule unité fermée pour la norme infinie. Où est atteint le maximum ?

★ ★ ★

Question 14.30 (ID : 1300). À quoi sert le lemme de Morse ? S'applique-t-il à beaucoup de fonctions ? (Autrement dit, pour une fonction, est-il courant de n'avoir que des points critiques non dégénérés ?)

Question 14.31 (ID : 1368). Sur les équations de transport : résoudre

$$\partial_{tt}u - c\partial_{xx}u = 0$$

Question 14.32 (ID : 1369). Sur les équations de transport : résoudre

$$\partial_t u - c\partial_x u = f,$$

avec f une gaussienne centrée en zéro.

15 Combinatoire (17 questions)

Question 15.1 (ID : 1419). Des personnes ont un chapeau, qu'elles retirent en arrivant dans une salle. En partant, elles reprennent un chapeau au hasard. En moyenne, combien de personnes ont leur chapeau à la fin ? Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son chapeau ?

Question 15.2 (ID : 2054). Sur les nombres de Bell : le « triangle de Bell » suivant permet de

	1				
	1	2			
calculer les nombres de Bell.	2	3	5		
	5	7	10	15	
	15	20	27	37	52

Expliquer comment est construit ce triangle et pourquoi le calcul des nombres de Bell est correct

Question 15.3 (ID : 2055). Sur les nombres de Bell : pourrait-on démontrer d'une autre manière que $B_n \leq n!$?

Question 15.4 (ID : 2071). Question de culture gé : que pouvez-vous dire du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$? (Situations où il apparaît, majorations et minoration triviales, moins triviales, équivalent, développements asymptotiques ?)

Question 15.5 (ID : 2072). Question de culture gé : que pouvez-vous dire du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$? (Situations où il apparaît, majorations et minoration triviales, moins triviales, équivalent, développements asymptotiques ?)

★ ★ ★

Question 15.6 (ID : 1210). De combien de manières peut-on colorier un cube avec six couleurs (une couleur par face) ? Et un octaèdre avec huit couleurs (même condition) ?

Question 15.7 (ID : 1365). Interpréter la composition des séries génératrices de manière combinatoire. Proposer un exemple.

Question 15.8 (ID : 1420). Combien y a-t-il de sous-ev de dimension k dans $\mathbb{F}_q^n$?

Question 15.9 (ID : 1449). Illustrer l'utilisation de la formule de Burnside sur la question suivante : combien y a-t-il de façons de colorier un cube avec trois faces noires et trois faces blanches ?

Question 15.10 (ID : 1506). On dispose d'une palette de six couleurs distinctes et on souhaite colorier les faces d'un cube. Combien de coloriages différents (à rotation près) peut-on obtenir

- en imposant d'utiliser toutes les couleurs (donc une face de chaque couleur) ?
- Sans imposer cette contrainte ?

Question 15.11 (ID : 1512). Illustrer l'utilisation de la formule de Burnside sur la question suivante : combien y a-t-il de façons de colorier un octaèdre régulier avec quatre faces noires et quatre faces blanches ?

Question 15.12 (ID : 1517). Combien y a-t-il de façons de colorier un tétraèdre avec (au plus) deux couleurs ? Avec 3 couleurs ? Avec 4 couleurs ? Et avec n couleurs ?

Question 15.13 (ID : 1631). Le n -ème nombre de Bell B_n est le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Calculer B_3 et B_4 . Si f et g sont deux fonctions réelles assez dérivables, calculer la dérivée quatrième de $f \circ g$. Connaissez-vous la formule générale ?

Question 15.14 (ID : 2053). Sur les nombres de Bell : la formule $B_n =$ est-elle utile ? Sert-elle par exemple à calculer concrètement les nombres de Bell ? Si oui, proposer un calcul de nombre de Bell à l'aide de cette formule.

Question 15.15 (ID : 2056). Sur les nombres de Bell : connaissez-vous un autre cas d'application de ces techniques ? (Introduction d'une série génératrice associée à une suite d'entiers ayant une définition combinatoire, obtention de résultats sur la somme de la série puis récupération de l'information.)

Question 15.16 (ID : 2057). Sur les nombres de Bell : la série génératrice permet-elle d'obtenir des estimations sur les B_n ? (Et pour d'autres problèmes semblables ?)

Question 15.17 (ID : 2059). Sur les nombres de Bell : la formule de Dobinski dit que B_n est la valeur en $x = 1$ de la fonction $T_n(x) = e^{-x} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!} x^k$.

Que peut-on dire de cette fonction T_n ?

16 Géométrie (38 questions)

Question 16.1 (ID : 1883). Dessinez trois points A , B et C au tableau puis placez les barycentres $\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{6}C$, $A + B - C$ et $\frac{1}{2}A + \frac{3}{5}B - \frac{1}{10}C$.

Question 16.2 (ID : 2075). Dessiner quatre points A , B , C et D au tableau et placer le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$ et $(D, 4)$.

★ ★ ★

Question 16.3 (ID : 1004). Définir à l'aide du groupe $\mathbb{U}$ l'angle orienté entre deux vecteurs non nuls du plan.

Question 16.4 (ID : 1233). Dessiner tous les axes de rotation d'un cube, d'un tétraèdre.

Question 16.5 (ID : 1237). Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$, soit u un vecteur unitaire. Décrire l'application

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto x \wedge u.$$

(Où $\wedge$ désigne le produit vectoriel.)

Question 16.6 (ID : 1257). Quelle est l'interprétation géométrique du déterminant ? Alternativement, montrer que dans le plan affine, l'aire orientée (étant fixé un parallélogramme étalon d'aire un) est une forme bilinéaire alternée.

Question 16.7 (ID : 1259). On considère trois droites affines du plan, d'équation $a_i x + b_i y + c_i = 0$ (pour $i = 1, 2, 3$). À quelle condition sont-elles concourantes ou parallèles ?

Question 16.8 (ID : 1260). Donner une équation du plan affine de l'espace passant par $(1, 2, 3)$, et dirigé par les vecteurs de coordonnées (u_x, u_y, u_z) et (v_x, v_y, v_z) . (À l'aide d'un déterminant.)

Question 16.9 (ID : 1409). Dans le plan muni d'un repère barycentrique (A, B, C) , quelle est une équation

1. D'une droite générale passant par A ?
2. De la droite passant par A et par $\frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C$?
3. De la droite passant par $\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$ et $\frac{2}{5}B + \frac{3}{5}C$?

Question 16.10 (ID : 1452). Qu'est-ce qu'une réflexion, un retournement ? Que savez-vous sur ces transformations ?

Question 16.11 (ID : 1746). On considère une rotation et une réflexion du plan euclidien. À quelle condition (nécessaire et suffisante) commutent-elles ?

Question 16.12 (ID : 1767). Dans le plan muni d'un repère barycentrique (trois points non-alignés), à quoi ressemble une équation de droite ? Quelle est l'équation d'une droite passant par les points P et Q (donnés par leurs coordonnées barycentriques) ?

Question 16.13 (ID : 1864). Dans le plan affine muni de coordonnées barycentriques, comment écrire que deux droites (données par des équations) sont parallèles ? Si elles sont sécantes, quel est le point d'intersection ?

Question 16.14 (ID : 1865). Dans le plan affine muni de coordonnées barycentriques, comment écrire que trois droites (données par des équations) sont concourantes ou parallèles ?

Question 16.15 (ID : 1935). Dans le plan affine euclidien muni du repère barycentrique (A, B, C) , montrer que le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) a pour coordonnées barycentriques non normalisées $(\tan \alpha, \tan \beta, 0)$. En déduire les coordonnées barycentriques de l'orthocentre.

Question 16.16 (ID : 1936). Dans le plan affine euclidien muni du repère barycentrique (A, B, C) , montrer que le centre du cercle circonscrit à ABC a pour coordonnées barycentriques non normalisées $(\sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma)$ ou encore $(a \cos \alpha : b \cos \beta : c \cos \gamma)$.

Question 16.17 (ID : 1937). Dans le plan affine euclidien muni du repère barycentrique (A, B, C) , montrer que le centre du cercle inscrit à ABC a pour coordonnées barycentriques non normalisées $(\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma)$ ou encore $(a : b : c)$.

Question 16.18 (ID : 1938). Follow-up sur le théorème de Ceva : soit ABC un triangle, et notons A' , B' et C' les points de contact des côtés avec le cercle inscrit. Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en un point Γ , appelé point de Gergonne. Montrer que ses coordonnées barycentriques non normalisées sont $(\tan \alpha/2 : \tan \beta/2 : \tan \gamma/2)$.

Question 16.19 (ID : 1952). Quel est le groupe d'isométries du tétraèdre dont les sommets sont $O = (0, 0, 0)$, $I = (1, 0, 0)$, $J = (0, 1, 0)$ et $K = (0, 0, 1)$?

Question 16.20 (ID : 1981). Exhiber un polyèdre dont le groupe des isométries est le groupe diédral D_n .

Question 16.21 (ID : 1990). On sait qu'une isométrie affine en dimension deux peut s'écrire comme le produit d'au plus trois réflexions orthogonales (qu'on appelle aussi symétries axiales dans ce contexte).

Si f est une symétrie glissée du plan euclidien, comment peut-on la décomposer en produit de réflexions ?

Question 16.22 (ID : 2010). Le plan affine est muni d'un repère barycentrique (A, B, C) . Soient P , Q et R trois points, de coordonnées $(x_P : y_P : z_P)$, $(x_Q : y_Q : z_Q)$ et $(x_R : y_R : z_R)$. Que vaut l'aire du triangle PQR , en fonction de l'aire de ABC ? Quel est le lien avec les équations de droites en coordonnées barycentriques ?

Question 16.23 (ID : 2011). Soit ABC un triangle du plan. On considère les trois points suivants :

1. le centre de gravité du triangle plein (supposé homogène) ;

2. le centre de gravité du bord du triangle, c'est-à-dire le centre de gravité des trois segments (supposés de masse linéique constante) ;
3. le centre de gravité des trois sommets (supposés de même masse).

Ces trois points sont-ils égaux ? (Dans le cas contraire, quelles sont leurs coordonnées barycentriques, que dire d'eux ?)

(Suite possible : et pour un quadrilatère ?)

Question 16.24 (ID : 2076). Soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de la médiane $[AM]$. La droite (CN) coupe $[AB]$ en un point P . Où se situe ce point sur le segment $[AB]$?

Question 16.25 (ID : 2077). Soit ABC un triangle. On place des points A' , B' et C' au tiers de chaque côté. (Toujours dans le même ordre.) Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$? Les droites (AA') , (BB') et (CC') se recoupent en formant un autre triangle plus petit. Quelle est l'aire de ce nouveau triangle ?

Question 16.26 (ID : 2119). Montrer que Sym^n est convexe, puis que Sym_+^n est convexe.

★ ★ ★

Question 16.27 (ID : 1234). Montrer qu'une isométrie d'un espace affine euclidien est automatiquement affine.

Question 16.28 (ID : 1508). Considérons une isométrie entre la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme 1 et la boule unité de $\mathbb{R}^n$ pour la norme infinie. Montrer que $n = 1$ ou $n = 2$.

Question 16.29 (ID : 1769). Quelle est l'enveloppe convexe de $SO(2)$? Et de $O(2)$? Que peut-on dire de ces questions en dimension n ?

Question 16.30 (ID : 1771). On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme N et on considère le groupe G des isométries vectorielles pour cette norme. Si N est la norme ℓ^2 , G est isomorphe à $O(2)$. Si on change la norme, à quoi le groupe G peut-il être isomorphe ? Peut-il être fini ? De cardinal fini arbitrairement grand ? Infini dénombrable ? Isomorphe à $SO(2)$?

Question 16.31 (ID : 1773). Donner un exemple de norme sur $\mathbb{R}^2$ dont le groupe des isométries vectorielles est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Question 16.32 (ID : 1802). Montrer qu'un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ rencontre toujours $GL_n(\mathbb{R})$. Rencontre-t-il toujours son complémentaire ? Et sur un corps quelconque ?

Question 16.33 (ID : 1803). Peut-il y avoir des droites affines de $M_n(\mathbb{R})$ entièrement contenues dans $GL_n(\mathbb{R})$? Entièrement contenus dans le complémentaire de $GL_n(\mathbb{R})$? Et sur d'autres corps ?

Question 16.34 (ID : 2015). Montrer que les retournements engendrent $SO(3)$. Les retournements sont-ils tous conjugués ?

Question 16.35 (ID : 2078). Soit $A_1A_2A_3A_4$ un quadrilatère convexe. Pour $i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, on place deux points aux tiers du segment $[A_iA_{i+1}]$, à savoir $B_i = \frac{2}{3}A_i + \frac{1}{3}A_{i+1}$ et $C_i = \frac{1}{3}A_i + \frac{2}{3}A_{i+1}$. On trace ensuite les segments $[B_iC_{i+2}]$. Faire un dessin et montrer qu'ils se croisent en formant un quadrilatère dont l'aire est un neuvième de l'aire de $A_1A_2A_3A_4$.

★ ★ ★

Question 16.36 (ID : 1058). Montrer que l'action du groupe modulaire sur le demi-plan est vraiment une action de groupe.

Question 16.37 (ID : 1165). Quels sont les points du plan qui sont constructibles au compas seul ? Et à la règle seule ? Connaissez-vous des variantes de ces questions ?

★ ★ ★

Question 16.38 (ID : 1163). Qu'est-ce que le problème de l'empilement des sphères de Kepler ? Que peut-on dire dessus ?

17 Probabilités (43 questions)

Question 17.1 (ID : 1124). Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, uniformes sur $\{1, \dots, n\}$. Calculer la loi de l'infimum des deux, et de $|X - Y|$.

Question 17.2 (ID : 1324). Soit X une variable de loi géométrique de paramètre p . Calculer $\mathbb{E}(1/X)$.

Question 17.3 (ID : 1325). Soit X une variable de loi de Poisson de paramètre λ . Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Question 17.4 (ID : 1326). Soient X et Y deux variables discrètes de même loi, indépendantes, strictement positives. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geq 1$.

Question 17.5 (ID : 1362). Soit M une matrice 2×2 remplie aléatoirement de 1 et -1 (avec loi uniforme). Calculer l'espérance de $(\det M)^2$.

Question 17.6 (ID : 1364). Prouver que l'espérance du produit de deux variables aléatoires indépendantes est égale au produit des espérances.

Question 17.7 (ID : 1577). Donner un exemple de trois variables aléatoires deux à deux indépendantes, mais non mutuellement indépendantes.

Question 17.8 (ID : 1578). Expliquer pourquoi deux variables aléatoires indépendantes X et Y vérifient $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, les variables sont-elles indépendantes ?

Question 17.9 (ID : 1579). Expliquer pourquoi lorsqu'on a un couple (X, Y) de variables aléatoires, connaître les lois marginales ne permet pas de connaître la loi du couple. Existe-t-il des situations où c'est toutefois vrai ?

Question 17.10 (ID : 1585). Soit $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, et soit $A \subseteq E$ une partie de E tirée aléatoirement pour la loi uniforme sur $\mathcal{P}(E)$. Par ailleurs, soient $i \neq j \in E$. Expliquer de plusieurs façons pourquoi les événements $i \in A$ et $j \in A$ sont indépendants.

Question 17.11 (ID : 1588). Soient X et Y des variables aléatoires. Les assertions « X et Y sont indépendantes » et « X et Y ont covariance nulle » sont-elles équivalentes, lorsqu'elles ont toutes deux un sens ? A-t-on au moins une implication ?

Question 17.12 (ID : 1876). Dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, on tire deux parties aléatoires A et B , indépendamment et pour la loi uniforme. Quelle est la probabilité que A et B soient disjointes ? Que A soit incluse dans B ? Que $A \cap B$ soit de cardinal un ?

Question 17.13 (ID : 1879). On tire aléatoirement (pour la loi uniforme) une partie A de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Quelle est l'espérance de $|A|$? Quelle est l'espérance de $\sum_{k \in A} k$?

Question 17.14 (ID : 1880). On jette un dé à six faces non pipé. (*Protestations sur les bancs des probabilistes.*) Montrer qu'il ne peut pas y avoir plus de deux événements non triviaux mutuellement indépendants.
(*Cris de rage, grand tumulte.*)

Question 17.15 (ID : 1946). On tire trois réels dans $[0, 1]$ pour la loi uniforme. Quelle est la probabilité que $X \leq Y \leq Z$?

Question 17.16 (ID : 2063). Quelle est la probabilité pour un triangle aléatoire d'être acutangle, c'est-à-dire de n'avoir que des angles aigus ? (Formaliser l'énoncé et faire impérativement un dessin.)

Question 17.17 (ID : 2079). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$. Expliquer pourquoi $\mathbb{E}X = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$. Et si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$?

Question 17.18 (ID : 2080). On dispose d'une machine qui répond 0 avec probabilité $p \in]0, 1[$ et 1 avec probabilité $1 - p$. On souhaite l'utiliser pour fabriquer une machine qui répond 0 ou 1 avec équiprobabilité. Comment faire ?

Question 17.19 (ID : 2081). On tire aléatoirement un n -uplet dans $\{\pm 1\}^n$, pour la loi uniforme. Soit X le nombre de changements de signe dans le n -uplet obtenu. Quelle est la loi de X ?

Question 17.20 (ID : 2082). Soit $n \geq 2$. On tire aléatoirement une partie à deux éléments de $\{1, \dots, n\}$, pour la loi uniforme, et on appelle X le plus petit de ces deux éléments. Quelle est l'espérance de X ?

Question 17.21 (ID : 2083). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. Est-ce que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes ?

Question 17.22 (ID : 2089). Quelle est la probabilité d'obtenir N en lançant n dés ?

★ ★ ★

Question 17.23 (ID : 1123). Calculer les moments d'une loi normale, en utilisant une intervention d'intégrales.

Question 17.24 (ID : 1327). Connaissez-vous des probas sur $\mathbb{N}^*$ telles que si p et q sont premiers, les événements $p\mathbb{N}^*$ et $q\mathbb{N}^*$ sont indépendants ?

Question 17.25 (ID : 1366). Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$. On lance un arbre aléatoire avec X enfants à chaque nœud (indépendamment), et on note Z_n le nombre d'enfants à la n -ème génération. Quelle est l'espérance de Z_n ?

Bonus : à quelle époque ont vécu Galton et Watson ?

Question 17.26 (ID : 1580). Comparer les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires réelles (en loi, en proba, presque sûre, en norme p etc) et donner des contre-exemples pour montrer que ces notions ne sont pas équivalentes.

Question 17.27 (ID : 1583). On sait que la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Réciproquement, soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et supposons $X = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des Bernoulli $\sim \mathcal{B}(p)$. Est-ce que les X_i sont indépendantes ?

Question 17.28 (ID : 1584). On sait que la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ est une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Réciproquement, soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une v.a. binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Peut-on écrire $X = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $X_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des Bernoulli $\sim \mathcal{B}(p)$ indépendantes ?

Question 17.29 (ID : 1587). Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles vérifiant $X + Y \sim X + Z$. A-t-on $Y \sim Z$? Et si les variables sont indépendantes et valeurs dans $\mathbb{N}$?

Question 17.30 (ID : 1589). Soient X et Y des variables aléatoires. On suppose que X est indépendante en moyenne de Y , c'est-à-dire que

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbb{E}(X|Y = y) = \mathbb{E}X$$

Ceci implique-t-il que les variables sont indépendantes, ou bien décorrélées ? Que dire des implications inverse ?

Question 17.31 (ID : 1590). On sait que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, alors pour toute fonction mesurable f , $f(X)$ et $f(Y)$ sont indépendantes. Peut-on remplacer « indépendantes » par « de covariance nulle » ?

Question 17.32 (ID : 1821). Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Déterminer la loi de XY .

Question 17.33 (ID : 1942). On tire trois réels aléatoires a, b et c uniformément sur $[-1, 1]$ et on forme le polynôme $P = aX^2 + bX + c$. Est-il plus probable que P ait deux racines réelles, ou bien que P ait deux racines complexes conjuguées ?

Question 17.34 (ID : 1943). On tire aléatoirement pour les lois uniformes des réels $\theta \in [0, 2\pi]$ et $r \in [0, 1]$.

Le nombre complexe $z = re^{i\theta}$ suit-il une loi uniforme sur le disque $\mathbb{D}$?

Question 17.35 (ID : 2064). On fixe un cercle du plan, on tire aléatoirement trois points sur ce cercle, pour la loi uniforme. Quelle est la probabilité que le triangle obtenu soit acutangle, c'est-à-dire n'ait que des angles aigus ?

Question 17.36 (ID : 2065). Quelle est la probabilité qu'un triangle aléatoire de périmètre 1 soit acutangle, c'est-à-dire n'ait que des angles aigus ? Commencer par formaliser le problème.

Question 17.37 (ID : 2067). On tire trois points sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ pour la loi uniforme. En moyenne, quelle est l'aire du triangle obtenu ?

Question 17.38 (ID : 2084). Soit M une matrice aléatoire dont les coefficients sont tirés indépendamment suivant une loi d'espérance μ . Pour $x \in \mathbb{R}$, que vaut l'espérance de $\chi_M(x)$?

Question 17.39 (ID : 2085). Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance finie. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ un système complet d'évènements. Est-ce que $\mathbb{E}X = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{A_n})$?

Question 17.40 (ID : 2086). Soit X une variable aléatoire réelle admettant une espérance finie. Est-ce que $\mathbb{E}(X \mathbf{1}_{|X| \leq n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}X$?

Question 17.41 (ID : 2127). On prend un cercle et on trace une corde au hasard. Que dire de sa longueur ? Vous avez ~~six heures~~ trois minutes.

★ ★ ★

Question 17.42 (ID : 1944). On tire trois points aléatoires du plan A, B et C , en tirant leurs coordonnées cartésiennes suivant une loi normale centrée réduite.

Quelle loi suit l'aire du triangle ABC ? Quelle est l'espérance de l'aire?

Question 17.43 (ID : 1945). On tire trois points aléatoires du plan A, B et C , en tirant leurs coordonnées cartésiennes suivant une loi normale centrée réduite.

Quelle est la probabilité que le triangle soit acutangle? Obtusangle?

18 Théorie des ensembles (6 questions)

Question 18.1 (ID : 1602). Qu'est-ce que le procédé diagonal de Cantor? Donner un énoncé et un exemple d'utilisation.

Question 18.2 (ID : 1744). Construire une bijection entre $[0, 1]$ et $]0, 1[$.

Question 18.3 (ID : 1929). L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable?

Question 18.4 (ID : 1930). L'ensemble des suites entières est-il dénombrable? Et celui des suites entières ne prenant qu'un nombre fini de valeurs?

★ ★ ★

Question 18.5 (ID : 1605). Soit H un sous-groupe strict de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus H$ n'est pas dénombrable.

★ ★ ★

Question 18.6 (ID : 1089). Soit K un corps, et L une extension algébrique de K . Montrer que

$$\text{Card } L \leq \text{Card } (K[X] \times \mathbb{N})$$

19 Topologie (72 questions)

Question 19.1 (ID : 1167). Vrai ou faux? Dans un espace métrique, l'adhérence d'une boule ouverte de rayon r est la boule fermée de rayon r .

Et dans un EVN?

Question 19.2 (ID : 1269). Pourquoi $U(n)$ est-il compact? (Donner les détails.)

Question 19.3 (ID : 1387). Dans un evn E , peut-on avoir $\mathbb{B}(a, r) = \mathbb{B}(a', r)$ avec $a \neq a'$?

Question 19.4 (ID : 1853). C'est qui le plus fort : l'hippopotame ou l'éléphant Bolzano-Weierstrass ou Borel-Lebesgue?

Question 19.5 (ID : 1886). $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ sont-ils difféomorphes? Homéomorphes?

Question 19.6 (ID : 1928). Montrer qu'il n'existe pas de fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui envoie les rationnels dans les irrationnels et les irrationnels dans les rationnels.

Question 19.7 (ID : 2016). Est-ce que la sphère S^n est connexe? Pourquoi?

Question 19.8 (ID : 2017). Est-ce que $\mathbb{R}^n$ privé d'un nombre fini de points est connexe? Pourquoi?

Question 19.9 (ID : 2096). Soit $\mathcal{C} = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$. Déterminer les composantes connexes de $\mathcal{C}$ ainsi que celles de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.

Question 19.10 (ID : 2097). Soit $\mathcal{C} = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 3y^2 = 1)\}$. Déterminer les composantes connexes de $\mathcal{C}$ ainsi que celles de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$.

Question 19.11 (ID : 2103). Une fonction continue et injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement monotone. Proposer une preuve de ce fait en utilisant la connexité de $\{(x, y \in \mathbb{R}^2, x < y)\}$.

Question 19.12 (ID : 2123). Montrer que la distance entre deux compacts disjoints est bien définie et strictement positive.

Question 19.13 (ID : 2131). Donner un exemple d'application $f : X \rightarrow X$ sur un espace métrique, qui n'est pas contractante, mais telle que f^2 est contractante.

Question 19.14 (ID : 2139). Dans le théorème du point fixe de Banach, les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ convergent vers le point fixe. À quelle vitesse ?

Question 19.15 (ID : 2141). Soit E un espace métrique complet, $k \in]0, 1[$ et $f : E \rightarrow E$ une application k -contractante. On cherche l'unique point fixe de f . Pour cela on prend un point $x_0 \in E$, on calcule $x_1 = f(x_0)$ et on mesure la distance $\ell := d(x, y)$. Que peut-on dire sur la distance entre x_1 et le point fixe ?

Question 19.16 (ID : 2142). Soit E un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application k -contractante, avec $k < 1$. On désire calculer une approximation du point fixe, en itérant f sur un point arbitraire. (On sait que cette suite récurrente tend vers l'unique point fixe.) Comment savoir si on est ϵ -proche du point fixe pour arrêter l'algorithme ?

Question 19.17 (ID : 2143). Donner un exemple d'application $f : E \rightarrow E$ ayant un unique point fixe, mais telle que la composée $f \circ f$ n'ait pas un unique point fixe.

★ ★ ★

Question 19.18 (ID : 1002). Donner un homéomorphisme entre $\mathbb{C}^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$. Peut-on généraliser ce résultat ?

Question 19.19 (ID : 1010). Nature topologique des formes quadratiques définies positives dans l'ensemble des formes quadratiques.

Question 19.20 (ID : 1061). Montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, de deux manières différentes.

Question 19.21 (ID : 1090). Soit F un fermé du plan euclidien. On le projette sur une droite : obtient-on un fermé ? Que peut-on dire ?

Question 19.22 (ID : 1133). Démontrer la densité des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ de plusieurs façons.

Question 19.23 (ID : 1171). Soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. U est égal à $\mathbb{R}$ privé au maximum d'un nombre dénombrable d'irrationnels.
2. U est de mesure (de Lebesgue) pleine.
3. U est de mesure (de Lebesgue) infinie.

Question 19.24 (ID : 1248). La décomposition polaire est-elle un homéomorphisme (de quoi sur quoi) ? Dans le cas des matrices 1×1 , qu'est-ce que cela donne ?

Question 19.25 (ID : 1386). Soit E un $\mathbb{R}$ -evn de dimension finie, et A une partie bornée non vide. Montrer que A est incluse dans une boule fermée $\overline{\mathbb{B}}(a, r)$ de rayon minimal. Le point a est-il unique ?

Question 19.26 (ID : 1388). Rappeler pourquoi le graphe d'une fonction continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est fermé. Réciproquement, si le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est fermé, la fonction est-elle forcément continue ? Et si f est de plus bornée ?

Question 19.27 (ID : 1389). Soit E un evn de dimension finie et F un sous-ev. Montrer que $\overline{F} = F$.

Et si seul F est supposé de dimension finie ?

Question 19.28 (ID : 1397). Dans $\mathbb{R}$, une suite telle que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$ a des valeurs d'adhérence qui forment un connexe. Redémontrer le résultat et trouver un contre-exemple pour des suites à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Question 19.29 (ID : 1403). Proposer des métriques sur $]0, +\infty[$ et sur $]0, 1[$ qui les rendent complets mais sans changer la topologie.

L'ensemble $]0, +\infty[$ avec la métrique $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ est-il complet ?

Question 19.30 (ID : 1427). Dans $M_n(\mathbb{R})$, quelle est l'adhérence des matrices diagonalisables ? Sont-elles denses ?

Question 19.31 (ID : 1442). Soit $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer de plusieurs manières que $GL_n(k)$ est dense dans $M_n(k)$. Que devient la questions sur d'autres corps et que peut-on dire ?

Question 19.32 (ID : 1485). Quelle est la différence entre connexe et connexe par arcs ? Donner des exemples et contre-exemples.

Question 19.33 (ID : 1499). Un sous-monoïde de $(\mathbb{R}_+, +)$ est une partie stable par somme et contenant 0. Est-ce qu'un sous-monoïde est discret ou dense, comme c'est le cas pour les sous-groupes ? Un sous-monoïde est-il l'intersection d'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}_+$? Et s'il est discret ?

Question 19.34 (ID : 1530). Lorsqu'on parle d'homéomorphisme dans la décomposition polaire, de quelle topologie s'agit-il ?

Question 19.35 (ID : 1534). Montrer que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est ouvert dans l'ensemble des matrices symétriques. Et dans $M_n(\mathbb{R})$?

Expliquer en détail en dimension un et deux.

Question 19.36 (ID : 1536). Que peut-on dire d'une endofonction d'un espace métrique compact, qui de plus préserve les distances ?

Question 19.37 (ID : 1545). Soit K un compact non vide d'un evn et $f : K \rightarrow K$ (faiblement) contractante au sens où $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Montrer qu'il existe un unique point fixe.

Question 19.38 (ID : 1546). Soit K un compact d'un evn, et $X = \bigcup_{(x,y) \in K^2} [x, y]$ la réunion de tous les segments joignant des points de K . Montrer que X est compact.

Question 19.39 (ID : 1567). Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert qui contient la boule unité fermée. Montrer que U contient une boule fermée de rayon > 1 .

Question 19.40 (ID : 1607). Donner plusieurs exemples de sous-groupes denses de $(\mathbb{R}, +)$, dénombrables et indénombrables.

Question 19.41 (ID : 1645). Citer le théorème du point fixe de Picard et montrer que les hypothèses de complétude et de contraction sont nécessaires à l'aide de contre-exemples.

Question 19.42 (ID : 1884). L'image de l'exponentielle matricielle réelle est-elle ouverte dans $M_n(\mathbb{R})$?

Question 19.43 (ID : 1923). Existe-t-il des topologies sur $\mathbb{R}$ pour lesquels $\mathbb{Q}$ n'est pas dense ? Et des topologies pour lesquelles $\mathbb{Z}$ est dense ?

Question 19.44 (ID : 1931). Dans $\mathcal{C}^0([0, 1], [0, 1])$ muni de la convergence uniforme, c'est-à-dire de la norme $\|f\|_\infty$, l'ensemble des fonctions injectives (resp. surjectives) est-il fermé, ouvert ?

Question 19.45 (ID : 1977). Pourquoi un produit d'espaces métriques est-il un espace métrique ? Quelle métrique(s ?) mettre dessus ? Si le produit est dénombrable, par exemple ?

Question 19.46 (ID : 1978). Vous avez affirmé qu'une famille équicontinue sur un segment était uniformément équicontinue grâce à Heine. Démontrez ce résultat.

Question 19.47 (ID : 2018). Soit E un evn et $F \subset E$ un sous-ev. Est-ce que $E \setminus F$ est connexe ?

Question 19.48 (ID : 2091). La sphère S^n privée d'un nombre dénombrable de points est-elle connexe ?

Question 19.49 (ID : 2092). Soit A une partie connexe d'un evn (variation : connexe par arcs). Son intérieur est-il connexe ? Sa frontière ? Son adhérence ? Son extérieur ? Son complémentaire ?

Question 19.50 (ID : 2093). Soit γ une application continue de $[0, 1]$ dans $M_n(\mathbb{R})$. Le rang de $\gamma(t)$ est-il constant ? Et si γ est à valeurs dans l'ensemble des projecteurs ?

Question 19.51 (ID : 2094). Les matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$ forment-elles une partie connexe ? (Par arcs ?)

Question 19.52 (ID : 2095). Les matrices nilpotentes dans $M_n(\mathbb{R})$ forment-elles une partie connexe ? (Par arcs ?)

Question 19.53 (ID : 2098). Dans $\mathbb{R}^2$, étudier les composantes connexes de la partie $\{\sin(xy) = 1\}$.

Question 19.54 (ID : 2099). Quelles sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$?

Question 19.55 (ID : 2100). Quelles sont les composantes connexes de $\{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid M^2 = I_n\}$?

Question 19.56 (ID : 2101). Existe-t-il des applications continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$ surjectives ? Bijectives ? Des homéomorphismes ?

Question 19.57 (ID : 2102). Existe-t-il des applications continues de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$ injectives ?

Question 19.58 (ID : 2121). Donner une suite à valeurs dans un compact quelconque dont l'ensemble des valeurs d'adhérence est connexe et qui ne vérifie pas $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$.

Question 19.59 (ID : 2122). Donner les valeurs d'adhérence de $u_n := \sin(n)$.

Question 19.60 (ID : 2132). Donner un exemple d'espace métrique E et de $f : E \rightarrow E$ continue et vérifiant $\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ et qui n'a pas de point fixe.

Question 19.61 (ID : 2133). $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$ a combien de composantes connexes ? Détailler la preuve que $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathbb{B}^n}$ est connexe.

Question 19.62 (ID : 2135). Dans le théorème du point fixe de Banach, si on affaiblit l'hypothèse à $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$, que se passe-t-il ? Conserve-t-on l'existence d'un point fixe en perdant l'unicité ? L'inverse ? Autre chose ?

Question 19.63 (ID : 2136). Soit E un espace métrique complet, $f \in \mathcal{C}^0(E, E)$ et $p > 1$. On suppose que f^p est k -contractante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Question 19.64 (ID : 2137). Soit E métrique complet, $f : E \rightarrow E$ et $p > 1$. On suppose que f^p est k -contractante. avec $k > 1$. Montrer que f^p est continue. Est-ce que f est nécessairement contractante? Continue? Admet un point fixe? Unique? Est-il obtenu par itération $u_{n+1} = f(u_n)$? Pour n'importe quel u_0 ?

Question 19.65 (ID : 2138). Soit K un compact non vide du plan et $f : K \rightarrow K$ une application 1-lipschitzienne. Est-ce que f admet forcément un point fixe et si oui, est-il unique?

★ ★ ★

Question 19.66 (ID : 1085). Expliquer comment construire une courbe de Peano, c'est-à-dire une application continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$ qui soit surjective. Une telle application peut-elle être de classe $\mathcal{C}^1$?

Question 19.67 (ID : 1396). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie sur laquelle toute fonction continue est bornée. (Une telle partie est dite pseudocompacte.)

La partie A est-elle compacte?

Question 19.68 (ID : 1399). Sur le théorème de Brouwer : en dimension deux, quelle est l'idée de la preuve? Comment illustrer le théorème? En dimension un, quel résultat classique retrouve-t-on? Prouver le cas de la dimension un de façon élémentaire.

Question 19.69 (ID : 1401). À propos des différents « lemmes de relèvement » que l'on voit souvent : que relève-t-on? Où ça? Que signifie « relever »? Donner différents exemples de relèvements.

Question 19.70 (ID : 1882). Rappeler comment modifier la métrique sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ pour le rendre complet, sans en modifier la topologie.

Est-il possible de faire la même chose pour $\mathbb{Q}$? (C'est-à-dire le munir d'une certaine métrique induisant la topologie standard, mais le rendant complet?)

Question 19.71 (ID : 2134). Savez-vous si le théorème du point fixe de Banach admet des « réciproques »? (Sous une forme ou une autre.)

Question 19.72 (ID : 2148). Trouver une métrique complète sur $\mathbb{R}$ rendant contractante l'application $f : x \mapsto 2x$.

20 [AUTRE] (8 questions)

Question 20.1 (ID : 1332). $\mathbb{Q}$ est un groupe abélien, c'est-à-dire un $\mathbb{Z}$ -module. Montrer que ce n'est pas un $\mathbb{Z}$ -module libre. Généraliser.

★ ★ ★

Question 20.2 (ID : 1638). Egoroff et Lusin?

★ ★ ★

Question 20.3 (ID : 1591). [META] Faites un dessin qui illustre votre développement.

Question 20.4 (ID : 1592). [META] À quoi sert votre développement? Proposer deux exos d'application très courts, puis deux applications un peu plus longues.

Question 20.5 (ID : 1593). [META] En 1m30, décrire la structure de la preuve du développement, les points délicats et l'idée pour les démontrer.

Question 20.6 (ID : 1594). [META] Faire tourner la preuve du développement dans un cas très simplifié mais néanmoins éclairant : basse dimension, certaines constantes fixées etc. (Il ne s'agit pas de refaire la preuve en remplaçant « n » par « 2 », mais plutôt d'obtenir une version faible ou un cas particulier qui tienne en 4-5 minutes.)

Question 20.7 (ID : 1595). [META] Donner des prolongements possibles du développement proposé, ainsi que le contexte dans lequel il s'insère naturellement.

Question 20.8 (ID : 2058). Sur les nombres de Bell : qui étaient Bell, Dobinski, Aitken, Peirce ? De quand datent les résultats ?

21 [HP] Distributions (5 questions)

Question 21.1 (ID : 1350). Résoudre au sens des distributions $y' + \lambda y = \delta_0$.

Question 21.2 (ID : 1351). Résoudre au sens des distributions $y'' - 3y' + 2y = \delta_0$.

Question 21.3 (ID : 1352). Résoudre au sens des distributions $y'' + \omega^2 y = \delta_0$.

Question 21.4 (ID : 1639). Résoudre $y' + y = H$ au sens des distributions, avec H la fonction de Heaviside, nulle sur les réels négatifs et valant 1 sur les positifs. Quelle situation physique est décrite par cette équation ?

Question 21.5 (ID : 1793). Résoudre au sens des distributions $y'' + y' + y = \delta_0$.

22 [HP] Représentations (22 questions)

Question 22.1 (ID : 1039). Combien y a-t-il de partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$ en deux ensembles de cardinal deux ?

En déduire un morphisme de $\text{Isom}(\text{Cube})$ vers S_3 . Géométriquement, ça revient à agir sur quel ensemble à trois éléments ? Quel est le noyau de ce morphisme ? Son image ?

Bonus : écrire le caractère de la représentation de S_4 que l'on obtient ainsi. Cette représentation est-elle irréductible ?

Question 22.2 (ID : 1054). Dresser la table de caractères de S_3 . (Très court : en fait, ceci peut même être esquissé lors de la défense du plan, pour illustrer.)

Question 22.3 (ID : 1055). Dresser la table de caractères du groupe des quaternions Q_8 .

Question 22.4 (ID : 1056). Si G est un groupe agissant sur un ensemble X , alors G agit sur $\mathbb{C}^X := \text{Fonctions}(X, \mathbb{C})$ de manière naturelle. Préciser comment.

Si X est fini de cardinal n , montrer que ceci définit une représentation linéaire de G de dimension n . Écrire le caractère de cette représentation.

Question 22.5 (ID : 1057). Soit G un groupe fini et (V, ρ) une représentation réelle de dimension finie. Montrer qu'il existe un produit scalaire invariant.

Et si G est infini, qu'est-ce qui ne marche pas ? Expliquer sur un exemple.

Question 22.6 (ID : 1076). Montrer que le théorème de Lie-Kolchin (un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable) tombe en défaut pour un groupe non connexe en donnant un contre-exemple.

Question 22.7 (ID : 1078). Montrer que le théorème de Lie-Kolchin (un sous-groupe connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{C})$ est cotrigonalisable) tombe en défaut pour $GL_n(\mathbb{R})$.

Question 22.8 (ID : 1158). Le théorème de prolongement des caractères affirme que si G est un groupe **abélien** fini et H un sous-groupe, tout caractère $\phi : H \rightarrow \mathbb{C}^*$ se prolonge en un caractère de G . Autrement dit, la flèche naturelle de restriction $\hat{G} \rightarrow \hat{H}$ est surjective.

Montrer que c'est faux pour les groupes finis non abéliens. (Et rappeler la preuve dans le cas abélien, puis pointer l'endroit où cette preuve ne s'applique pas dans le cas non-abélien, soit dans la preuve général, soit sur un groupe concret.)

Question 22.9 (ID : 1461). Sur les représentations : montrer que le théorème de Maschke tombe en défaut en caractéristique positive. Autrement dit, trouver une représentation avec un sous-espace stable non trivial qui n'admet pas de supplémentaire stable.

Question 22.10 (ID : 1462). Sur les représentations : montrer que le théorème de Maschke tombe en défaut en si le groupe n'est plus supposé fini. Autrement dit, trouver une représentation complexe d'un groupe infini admettant un sous-espace stable non trivial sans supplémentaire stable.

Question 22.11 (ID : 1463). Sur les représentations : soit V un k -ev, et G un sous-groupe de $GL(V)$. On suppose que V est irréductible pour G , autrement dit qu'il n'y a pas de sous-espaces G -stables non triviaux. Montrer que $\dim G \leq |G|$.

Question 22.12 (ID : 1464). Sur les représentations : les caractères sont-ils des morphismes ?

Question 22.13 (ID : 1465). Deux groupes non isomorphes peuvent-ils avoir la même table de caractères ?

Question 22.14 (ID : 1466). Dresser la table de caractères du groupe diédral D_4 .

Question 22.15 (ID : 1469). Sur les représentations et le théorème de Maschke : lorsqu'une représentation est somme directe de représentations irréductibles, est-ce qu'il y a unicité de cette décomposition ?

Question 22.16 (ID : 1476). Le groupe $\mathfrak{S}_4$ possède trois représentations irréductibles de dimension > 1 . En donner une interprétation géométrique.

Question 22.17 (ID : 1491). Montrer que les représentations linéaires irréductibles d'un groupe abélien fini sont de dimension un. Que peut-on dire pour des groupes abéliens infinis ?

Question 22.18 (ID : 1501). Comment utiliser les représentations pour démontrer qu'un groupe d'ordre quatre est abélien ? (Sans utiliser le théorème de Cauchy.)

Question 22.19 (ID : 1518). Sur le prolongement des caractères : on donne $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $H = 2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, et $\phi \in \hat{H}$ le caractère de H donné par $\phi([2]) = j$ (avec la convention classique $j = e^{2i\pi/3}$).

Prolonger ϕ à G .

Question 22.20 (ID : 1519). Sur le prolongement des caractères : on donne $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $H = \langle (1, 1) \rangle$, et $\phi \in \hat{H}$ le caractère de H donné par $\phi((1, 1)) = j$ (avec la convention classique $j = e^{2i\pi/3}$).

Prolonger ϕ à G .

Question 22.21 (ID : 1550). Sur le prolongement des caractères : où intervient la commutativité du groupe dans la preuve ? A-t-on besoin de l'existence d'un élément dont l'ordre est l'exposant ?

Si G est un groupe fini, non nécessairement abélien, mais qui possède un élément dont l'ordre est exactement l'exposant, peut-on prolonger les caractères des sous-groupes à G ?

Question 22.22 (ID : 1599). Donner un exemple de représentation (non triviale) d'un groupe fini sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension infinie. Donner un exemple de représentation fidèle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en dimension infinie.