

Table des matières

I	Pythagore sans calcul littéral	11
1	Le théorème de Pythagore et quelques exercices d'application	13
1	Incontournable : une démonstration « visuelle »	14
2	Échauffement : trapèze rectangle	14
3	Échauffement : les premiers carrés parfaits	14
4	Échauffement : quelques triplets pythagoriciens	15
5	Rectangles ou pas ?	15
6	Aire d'un parallélogramme	15
7	Aire d'un trapèze isocèle	18
8	Un premier triangle égyptien	19
9	Extrémités d'une ligne brisée	19
10	Polygone	19
11	Hypoténuses multiples	20
12	Hauteurs d'un losange	20
13	Spirale de Théodore	21
2	Carrés et triangles isocèles rectangles	23
14	Échauffement : calculs avec $\sqrt{2}$	24
15	Échauffement : carrés imbriqués	24
16	Deux petits carrés	24
17	Coupe Animath Junior octobre 2016	25
18	Zigzags dans un carré	25
19	Triangle isocèle avec angle au sommet de 45°	26
20	Un quadrilatère avec deux angles de 45°	26
21	Olympiades Ukrainiennes Junior : Deux côtés et un angle	26
22	Carrés articulés	27
23	Carré minimal contenant cinq carrés identiques	27
24	Carré minimal contenant dix carrés identiques	27
3	Triangles équilatéraux et hexagones réguliers	29
25	Échauffement sur les prérequis	29
26	Échauffement : calculs avec $\sqrt{3}$	30
27	Le triangle de l'écolier	30
28	Angles à trouver	30
29	Intersection des médianes d'un triangle équilatéral	30
30	Aire de l'hexagone régulier	31

31	Trois hexagones dans un hexagone	31
32	Deux triangles dans un hexagone	31
33	Cinq triangles dans un triangle	32
34	Dix triangles dans un hexagone	32
35	Deux céviennes	32
36	Triangle isocèle avec angle au sommet de 30°	33
37	Carrés imbriqués	33
38	Intersection de deux carrés	33
39	Triangle rectangle inscrit dans un rectangle	34
40	Triangle équilatéral et carré	34
41	Le « chapeau »	34
42	Trois carrés dans un triangle équilatéral	36
43	Densité de l’empilement hexagonal	36
4	Approfondissements et pavages	39
44	Échauffement : calculs avec $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$	39
45	Échauffement : étoile carrée	39
46	Trois triangles équilatéraux dans un carré	40
47	Quatre triangles dans un carré	40
48	Sept hexagones dans un hexagone	40
49	Intersection d’une médiatrice avec le côté opposé	41
50	Tuile du pavage carré adouci	41
51	Pavages par des carrés et triangles équilatéraux	41
52	Ratio dans un triangle $45^\circ - 60^\circ$	42
53	Un autre trapèze isocèle	42
54	Parallélogramme avec un angle de 75°	42
55	Pavage du Caire	43
56	Le « spectre »	44
57	Angle de $22,5^\circ$	45
58	Apothème de l’octogone	45
59	Simplifications avancées avec les racines carrées	45
60	Angle de 15°	45
61	Triangle équilatéral inscrit dans un carré	46
62	Aire et périmètre du dodécagone	47
5	Cercles	49
63	Rectangle dans un quart de cercle	50
64	Six points cocycliques	50
65	Demi-cercle dans un demi-cercle	50
66	Cordes égales faisant un angle de 120°	51
67	Comparaison d’aires	51
68	Un carré dans un quart de cercle	51
69	Rayon coupant une corde	52
70	Cordes perpendiculaires	52
71	Cordes sécantes à 45°	52
72	Le merveilleux théorème de l’angle droit	53
73	Demi-cercle posé sur un triangle isocèle	53
74	Quadrilatère inscriptible	54

TABLE DES MATIÈRES

7

75	Triangle égyptien dans un quart de cercle	54
76	Damier dans un cercle	55
77	Point sur le cercle circonscrit d'un carré	55
78	Recouvrement d'un carré par six disques	55
79	Recouvrement d'un carré par sept disques	56
6	Principe des tiroirs	59
80	Échauffement sans Pythagore	59
81	Cinq points dans un carré	60
82	Intuition sur le diamètre	60
83	Cinq points dans un triangle	61
84	Sept points dans un cercle	61
85	Sept points dans un carré	61
86	51 points dans un carré	61
87	Six points dans un carré	62
88	Six points dans un rectangle	62
7	Tangentes à un cercle	63
89	Échauffement : duplication du carré et du cercle	64
90	Échauffement : neuf disques	64
91	Rayon du cercle inscrit	65
92	Tangente commune à deux cercles tangents	65
93	Cercles orthogonaux	65
94	Trois petits cercles dans un cercle	66
95	Demi-cercle dans un quart de cercle	66
96	Trois cercles dans un rectangle	66
97	Cercles tangents	67
8	Empilements de disques dans un polygone régulier	69
98	Cercles inscrits dans un triangle équilatéral	69
99	Deux cercles dans un triangle équilatéral	69
100	Six cercles dans un triangle équilatéral	70
101	Hexagone contenant trois cercles	70
102	Hexagone contenant deux et quatre cercles	71
103	Deux et trois disques dans un carré	71
104	Cinq cercles dans un carré	71
9	Aires et quadratures	75
105	Échauffement : figures simples quarrables	75
106	Une rosace	76
107	Le salinon d'Archimède	76
108	Quadrature de la pince de Léonard	76
109	Une deuxième rosace	77
110	La première lunule d'Hippocrate	77
111	Lunules sur un triangle équilatéral	78
112	Tentative de quadrature du cercle par Hippocrate	79

10 Empilements de carrés dans un cercle	81
113 Échauffement : un et quatre carrés dans un cercle	82
114 Deux carrés dans un cercle	82
115 Cinq carrés dans un cercle	82
116 Six carrés dans un cercle	82
117 Trois carrés dans un cercle	83
118 35 carrés dans un cercle	83
119 Cinq carrés, mieux ou moins bien?	84
120 Trois carrés dans un cercle, version améliorée	84
121 Neuf carrés dans un cercle	84
122 Six carrés dans un cercle, version améliorée	85
 II Pythagore avec calcul littéral	 87
11 Calculs à une inconnue	89
123 Prérequis : développer, factoriser, identités remarquables	90
124 Côtés en progression arithmétique	90
125 D’après Coupe Animath Junior 2014	90
126 Hexagone équilatéral dans un carré	91
127 Treize triangles dans un hexagone	91
128 Quatre hexagones dans un hexagone	91
129 Longueur de la hauteur	92
130 Origami : rectangle replié	92
131 Triangle égyptien dans un carré	92
132 Origami : rectangle replié, bis	93
133 Triangle isocèle invisible	93
 12 Cercles et calcul littéral	 95
134 Un quart de cercle et un cercle dans un carré	95
135 Demi-cercle dans un triangle	95
136 Milieu d’une corde	96
137 Un Sangaku simplifié	96
138 Deux demi-cercles dans un rectangle	96
139 Cercle circonscrit d’un triangle isocèle	97
140 Vers le théorème de Descartes	97
141 Cercle inscrit d’un triangle rectangle	98
142 Triangle et cercle tangent	98
143 Demi-cercle inscrit dans un triangle égyptien	99
144 Cercle inscrit dans un triangle rectangle	99
 13 Calculs à plusieurs inconnues	 101
145 Échauffement : l’identité de Sophie Germain	101
146 Quelques systèmes (presque) linéaires	101
147 Deux médianes	102
148 Médianes perpendiculaires	102
149 Aire d’un trapèze dont on donne les côtés	102
150 Un système linéaire	103

TABLE DES MATIÈRES

9

151	Côté d'un parallélogramme	103
152	Diagonale d'un parallélogramme	103
153	Quatrième côté d'un quadrilatère orthodiagonal	104
154	Distances aux sommets d'un rectangle	104
155	Utilisation d'une identité remarquable	105
156	Distance entre deux milieux	105
14	Calculs à plusieurs inconnues avec cercles	107
157	Ni inscrit ni circonscrit	107
158	Deux cercles dans un triangle équilatéral	107
159	Demi-cercle dans un triangle rectangle	108
160	Ligne brisée dans un demi-cercle	108
161	Zigzags dans un cercle	108
162	Demi-tour dans un cercle	109
163	Zigzag dans un quart de cercle	109
164	Six petits cercles	109
165	Triangle dans un cercle	110
166	D'après des olympiades USA Junior	110
167	Aire entre deux demi-disques	111
168	Trois cercles dans un demi-cercle	111
169	Cercles tangents	111
15	Triangles pythagoriciens, d'Eisenstein et de Héron	113
170	La formule d'Euclide	113
171	Recherche de triplets pythagoriciens	113
172	La grande question sur la vie, l'univers et le reste	115
173	Triplets et triangles d'Eisenstein	115
174	Triangles d'Eisenstein : l'équation	116
175	Formule pour engendrer des triangles d'Eisenstein	116
176	Factorisation avancée : échauffement	117
177	Triangles pythagoriciens parfaits	117
16	Énoncés généraux	119
178	Triangles équilatéraux extérieurs	119
179	Sangaku et moyenne géométrique	120
180	Lunules d'Alhazen	120
181	Théorème du drapeau britannique	120
182	Condition nécessaire pour être orthodiagonal	121
183	Deux céviennes dans un triangle	121
184	Côtés en progression arithmétique, version générale	121
185	Une corde	122
186	Le célèbre Sangaku des trois cercles	122
187	Théorème de Carnot	123
188	Rayon du cercle circonscrit d'un triangle isocèle	123
189	Rayon du cercle inscrit d'un triangle isocèle	123
190	Cercles jumeaux d'Archimède	124

17 Conclusion et ouverture : quelques nouveaux théorèmes	125
191 Cosinus de l’angle double	125
192 Théorème de la hauteur relative à l’hypoténuse	126
193 Deuxième théorème de la hauteur	126
194 Théorème (de la médiane) d’Apollonius	126
195 Identité du parallélogramme	126
196 Trois applications du théorème d’Apollonius	127
197 Inégalités arithmético-géométrico-quadratique	127
198 Application : inégalité géométrico-harmonique	128
199 Loi des cosinus (Al-Kashi)	128
200 Formule de Héron	129
201 Une application de Héron	129
202 Théorème de Stewart	130
 III Indications et corrections	 131
18 Indications	133
19 Corrections	143
Index	249