Partie I : symbole $\sum$
Écrire en utilisant la notation $\sum$ les sommes suivantes :

$1+2+3+4+5+6$,
$1-2+3-4+5$,
$1+2i-3-4i+5+6i-7-8i+9$,
$3+4+5$,
$1+4+9+16$,
$2+4+6$,
$1+3+5+7$,
$1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5$,
$2\times 1+3\times 4+4\times 9+5\times 16$.

Partie II : récurrences

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$ et pour tout n positif, $u_{n+1}=1+\frac{1}{1+u_n}$. Montrer que tous les termes de la suite sont compris entre 1 et 2.

Soit x un réel positif, et n un entier naturel. Montrer que $(1+x)^n \geq 1+nx$, sans utiliser la formule du binôme de Newton.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0=7$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n-3$. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n=2^{n+2}+3$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la somme des n premiers nombres impairs est toujours un carré parfait. (Exemple : $1+3+5=9$ est un carré, $1+3+5+7=16$ aussi.)

Soit $a\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, et $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^n a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^n k=\frac{n(n+1)}{2}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^n k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Partie III : calcul direct Dans la suite, n est un entier naturel assez grand pour que les énoncés aient un sens. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n-2,$$
$$\sum_{k=0}^{2n} 2^{2k-1} = \frac{4^{2n+1}-1}{6},$$
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^{n+1}-2^{n+1},$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$
$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n,$$
$$\sum_{k=0}^{n} 2^{3k}3^{n-2k}\binom{n}{k} = (17/3)^n.$$

Partie IV : nombres complexes

Calculer le module et l'argument principal de $-1+i\sqrt{3}$, en détaillant. En déduire une forme exponentielle de ce nombre complexe.

Mettre le nombre complexe $\frac{3+6i}{3-4i}$ sous forme algébrique.

Calculer les racines carrées de $\sqrt{3}+i$. En déduire la valeur de $\cos(\pi/12)$.

Calculer les deux racines carrées de $7-24i$.

Déterminer les nombres complexes z tels que $|z-i| = |z-1|$.

Déterminer les nombres complexes z tels que $|z+2i| = 2|z-i|$.

Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, tels que $(c-a) = e^{i\pi/3}(b-a)$. Soient A, B, C les points du plan d'affixes a, b, c. Que dire du triangle ABC ?

Partie V : Polynômes

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(X)P(X+1) = P(X^2)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X-1$ divise X^n-1.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X^2+2X divise $(X+1)^{2n}-1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.

Effectuer la division euclidienne de $3X^5+2X^4+1$ par X^3+X+2.

Calculer le pgcd de X^8-1 et X^3+1.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, et a, b deux nombres complexes distincts. Montrer que si $X-a$ et $X-b$ divisent P, alors $(X-a)(X-b)$ divise P.

Avec les mêmes notations, on suppose maintenant que les restes des divisions euclidiennes de P par $X-a$ et $X-b$ valent 1. Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ vaut 1.

Trouver toutes les racines complexes de X^8+X^4+1.

Soit $P = X^2+5X+1$. Écrire explicitement la formule de Taylor pour P, en 2.