1 Équations d'ordre 1

Exercice 1
a) L'équation est homogène, à coefficients variables, le coefficient dominant est 1, le second est $1/t$, défini sur $\mathbb{R}^*$. Les intervalles maximaux de résolution sont $\mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$.

Les solutions sur $\mathbb{R}^*_-$ sont de la forme $t \mapsto K.e^{-\ln(|t|)} = \frac{K}{|t|} = -\frac{K}{t}$, où $K \in \mathbb{R}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}^*_+$ sont de la forme $t \mapsto L.e^{-\ln(|t|)} = \frac{L}{t}$, où $L \in \mathbb{R}$.

Ceci termine la résolution de l'ED sur les intervalles maximaux. Si on cherche une solution sur $\mathbb{R}^*$, on obtient donc les fonctions f de la forme (quitte à changer K en $-K$) :

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} K/t & \text{si } t \in \mathbb{R}^*_- \\ L/t & \text{si } t \in \mathbb{R}^*_+ \end{cases},$$

où K et L sont des réels.

b) L'ED est homogène, à coefficients variables, le coefficient dominant est 1, le second est $\sin(t)$, qui est défini sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont donc définies sur $\mathbb{R}$, et par le cours, elles sont de la forme $t \mapsto K.e^{\cos(t)}$, où $K \in \mathbb{R}$.

c) L'ED (notée E) est à coefficients constants, mais elle n'est pas homogène : le second membre est $1/(1+e^t)$, qui est défini sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée (E') est $y' + y = 0$, et ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $t \mapsto \lambda.e^{-t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t).e^{-t}$, où $\lambda(t)$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est la méthode de la variation de la constante). En injectant dans l'équation, on trouve $\lambda'(t)e^{-t} - \lambda(t)e^{-t} + \lambda(t)e^{-t} = 1/(1+e^t)$, c'est-à-dire $\lambda'(t) = e^t/(1+e^t)$. Il suffit alors calculer une primitive quelconque, par exemple $\lambda(t) = \ln(1+e^t)$. Une solution particulière de (E) est donc $t \mapsto e^{-t}\ln(1+e^t)$. Finalement, les solutions de (E) sont de la forme

$$t \mapsto \lambda.e^{-t} + e^{-t}\ln(1+e^t),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2
a) On commence par résoudre l'ED sans la condition sur $y(0)$. (Ce n'est pas toujours une bonne idée cependant, voir la question suivante). C'est une ED à coefficients constants, avec second membre défini sur $\mathbb{R}$, les solutions sont donc définies sur $\mathbb{R}$. On connait déjà les solutions de l'équation homogène associée (voir plus haut). Pour trouver une solution particulière, on applique le principe de superposition : en effet, le second membre est

la somme de $1/(1+e^t)$ et de t. Pour le premier bout, on a déjà calculé une solution particulière de $y'+y=1/(1+e^t)$ dans l'exercice précédent, c'est $t\mapsto e^{-t}\ln(1+e^t)$. Pour le second bout, il s'agit donc de trouver une solution particulière de $y'+y=t$. On peut appliquer la méthode de la variation de la constante, mais ici on voit facilement (?) que $t\mapsto t-1$ est solution (comme le second membre est un polynôme, on a envie de chercher un polynôme de même degré). Finalement, par le principe de superposition, une solution particulière est $t\mapsto e^{-t}\ln(1+e^t)+t-1$, et les solutions générales sont de la forme $t\mapsto \lambda.e^{-t}+e^{-t}\ln(1+e^t)+t-1$, où $\lambda\in\mathbb{R}$. On peut maintenant résoudre le problème de Cauchy : si $y(0)=1$, alors $\lambda+\ln(2)-1=1$, d'où $\lambda=2-\ln(2)$. La solution du problème de Cauchy est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t\mapsto (2-\ln(2))e^{-t}+e^{-t}\ln(1+e^t)+t-1.$$

b) C'est une ED est homogène, à coefficients variables. Le coefficient dominant est 1 (donc est défini sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas), et l'autre coefficient est défini sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont donc définies sur $\mathbb{R}$. Soit $t\mapsto B(t)$ une primitive de $t\mapsto \frac{\cos^2(t)}{\mathrm{ch}(t)}e^t$. Par le cours, les solutions de l'équation sont de la forme $t\mapsto \lambda e^{-B(t)}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$. Ce n'est pas la peine de chercher à résoudre complètement l'ED, ni de calculer la primitive (difficile) : en effet, le problème de Cauchy à résoudre est $y(1)=0$, ce qui donne $\lambda e^{-B(1)}=0$. L'exponentielle n'est jamais nulle, donc $\lambda=0$. La fonction cherchée est donc la fonction nulle. De façon générale, lorsque l'on a une équation différentielle d'ordre 1 dont les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$, alors les solutions sont soit jamais nulles, soit c'est la fonction nulle.

Exercice 3

a) C'est une ED à coefficients constants, à second membre défini sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t\mapsto\lambda e^{3t}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, si on ne voit pas la solution évidente $t\mapsto -2/3$, on applique la méthode de variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $t\mapsto\lambda(t)e^{3t}$, où $\lambda(t)$ est une fonction. En injectant dans l'équation on trouve donc $\lambda'(t)=2e^{-3t}$, donc en primitivant $\lambda(t)=-\frac{2}{3}e^{-3t}$, d'où la solution particulière $t\mapsto -2/3$. Les solutions générales de l'ED sont donc de la forme

$$t\mapsto -2/3+\lambda e^{3t},\quad \text{où } \lambda\in\mathbb{R}.$$

b) C'est une ED à coefficients constants, à second membre défini sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t\mapsto\lambda e^{-2t}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, si on ne voit pas la solution évidente $t\mapsto e^{2t}/4$, on utilise la méthode de variation de la constante, et on cherche une solution sous la forme $\lambda(t)e^{-2t}$. En injectant, on trouve alors $\lambda'(t)=e^{2t}e^{2t}$, d'où, en primtivant, $\lambda(t)=e^{4t}/4$, ce qui donne la solution particulière annoncée $e^{2t}/4$. Les solutions générales de l'ED sont donc de la forme

$$t\mapsto e^{2t}/4+\lambda e^{-2t},\quad \text{où } \lambda\in\mathbb{R}.$$

c) C'est une ED à coefficients constants, à second membre défini sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{5t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{5t}$. En injectant dans l'équation on trouve alors $\lambda'(t) = e^{-5t}e^{5t}$, d'où, en primitivant, $\lambda(t) = t$ par exemple. Une solution particulière est donc $t \mapsto te^{5t}$. Les solutions générales de l'ED sont donc de la forme

$$t \mapsto te^{5t} + \lambda e^{5t}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) C'est une ED à coefficients variables définis sur $\mathbb{R}$, avec second membre défini sur $\mathbb{R}$, et donc le coefficient dominant ne s'annule pas. Les solutions sont donc définies sur $\mathbb{R}$. Le coefficient dominant est 1. L'équation homogène associée (E') est $y' + 3t^2y = 0$, ses solutions générales (sur $\mathbb{R}$) sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t^3}$. Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-t^3}$, où $\lambda(t)$ est une fonction. On trouve $\lambda'(t) = t^2e^{t^3}$, donc $\lambda(t) = e^{t^3}/3$, et finalement une solution particulière est donc $t \mapsto 1/3$, que l'on aurait sans doute dû trouver de tête mais bon. Les solutions générales de l'équation (E) sont donc de la forme

$$t \mapsto 1/3 + \lambda e^{-t^3}, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

e) C'est une ED à coefficients constants, à second membre défini sur $\mathbb{R}$. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, variation de la constante, qui donne $\lambda'(t) = \sin(t)e^{-t}$ donc $\lambda(t) = -\frac{e^{-t}}{2}(\sin(t) + \cos(t))$. Une solution particulière est donc $t \mapsto -\frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t))$. Les solutions générales de l'ED sont donc de la forme

$$t \mapsto -\frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)) + \lambda e^t, \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

f) C'est une ED à coefficients variables et à second membre, et le coefficient dominant n'est pas constant, mais ne s'annule pas. L'ED est donc équivalente à l'ED

$$(E) \quad y' - \frac{t}{1+t^2}y = \frac{1+t+t^2}{1+t^2} = 1 + \frac{t}{1+t^2}.$$

C'est donc cette ED que l'on résout. Elle est à coefficients variables et à second membre, ses solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est

$$(E') \quad y' - \frac{t}{1+t^2}y = 0.$$

Après un calcul de primitive, on trouve que ses solutions générales sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{\ln(1+t^2)/2} = \lambda\sqrt{1+t^2}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Il reste à trouver une solution particulière de (E), a priori en utilisant le principe de superposition (le second membre est la somme de 1 et de $\frac{t}{1+t^2}$) et la variation de la constante pour chacun des deux bouts. Pour le premier bout du second membre, on trouve $\mathrm{Argsh}(t)\sqrt{1+t^2}$, pour le second bout, on trouve $\lambda(t) = -1$.

Finalement, en sommant une solution particulière de (E) est $t \mapsto \operatorname{Argsh}(t)\sqrt{1+t^2}-1$. Les solutions générales de (E) sont donc finalement :

$$t \mapsto \lambda\sqrt{1+t^2} + \operatorname{Argsh}(t)\sqrt{1+t^2} - 1,$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

C'est une équation d'ordre 1, à coefficients variables, avec second membre défini sur $\mathbb{R}$, mais le coefficient dominant peut s'annuler. On se place sur des intervalles maximaux où il ne s'annule pas et on résout.

a) Sur $]-1;1[$, le coeficient ne s'annule pas, et sur cet intervalle l'ED est équivalente à

$$y' - \frac{2t}{1-t^2}y = \frac{1}{1-t^2}.$$

Le coefficient variable s'intègre à vue, et on trouve que les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-\ln|1-t^2|} = \lambda\frac{1}{1-t^2}.$$

On applique la méthode de la variation de la constante, et on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\frac{1}{1-t^2}$, où $\lambda(t)$ est une fonction sur $]-1,1[$. On trouve alors $\lambda'(t) = 1$, d'où la solution particulière $t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$. Les solutions sur $]-1,1[$ sont de la forme

$$t \mapsto \lambda\frac{1}{1-t^2} + \frac{t}{1-t^2},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) La solution sur $]-1,1[$ qui vaut 1 en 0 correspond donc à $1 = \lambda$, c'est donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

c) Sur $]-\infty,-1[$, les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \frac{\mu}{t^2-1}$, et la même solution particulière marche encore. En gros on trouve la même chose.

Exercice 5

a) On se place sur un intervalle I où le coefficient dominant ne s'annule pas, par exemple $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à

$$(E) \quad y' - \tan(t)y = -1.$$

L'équation homogène associée est $y' - \tan(t)y = 0$. Une primitive de $t \mapsto \tan(t)$ est donnée par exemple $t \mapsto -\ln(cos(t)$. La solution générale sur I de l'équation homogène est donc de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-\ln(\cos(t))} = \frac{\lambda}{\cos(t)},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière de (E), on applique la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto \frac{\lambda(t)}{\cos(t)}$, où $\lambda(t)$ est une fonction sur I. En remplacant, on obtient la condition $\lambda'(t) = -\cos(t)$, d'où la solution particulière $t \mapsto -\tan(t)$. La solution générale de (E) sur l'intervalle I est donc de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{\cos(t)} - \tan(t),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Les solutions sur les autres intervalles sont de la même forme, mais la constante n'est pas forcément la même.

b) Le coefficient ne s'annule pas, mais l'autre coefficient n'est pas défini sur $\mathbb{R}$. On se place sur un intervalle maximal I de définition de $\tan(t)$, par exemple $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. L'équation homogène associée à (E) est

$$(E') \quad y' + \tan(t)y = 0.$$

Ses solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda \cos(t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons maintenant une solution particulière de (E), sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\cos(t)$, où $\lambda(t)$ est une fonction. En remplacant, on obtient la condition $\lambda'(t) = \tan(t)$. On obtient donc comme solution particulière de (E) la fonction $t \mapsto -\cos(t)\ln(cos(t))$. La solution générale de (E) est donc de la forme

$$t \mapsto \lambda \cos(t) - \cos(t)\ln(\cos(t)),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) L'équation est homogène à coefficients variables définis sur $\mathbb{R}$. Le coefficient dominant s'annule en 0. On résout d'abord l'équation sur $I = \mathbb{R}_-^*$. Sur cet intervalle, l'équation est équivalente à

$$(E)y' + \frac{4(1-t^2)}{t^3}y = 0.$$

Une primitive de $t \mapsto \frac{4(1-t^2)}{t^3}$ est par exemple $t \mapsto -4\ln|t| - 2/t^2$. La solution générale de (E) est donc de la forme

$$t \mapsto \lambda t^4 e^{2/t^2},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Sur l'autre intervalle, on trouve une solution de la même forme.

d) On résout sur un intervalle maximal I de définition de $\tan(t)$. L'équation homogène a déjà été traitée, la solution générale est de la forme $t \mapsto \lambda\cos(t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)\cos(t)$, où $\lambda(t)$ est une fonction. En remplacant dans (E), on obtient la condition $\lambda'(t) = 1$, d'où la solution particulière $t \mapsto t\cos(t)$. La solution générale de (E) est donc de la forme

$$t \mapsto \lambda\cos(t) + t\cos(t),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

e) On se place sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Une primitive de $t \mapsto 1/tan(t)$ est $t \mapsto \ln(\sin(t))$. La solution générale de l'équation homogène est donc de la forme $t \mapsto \lambda/\sin(t)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)/\sin(t)$, où $\lambda(t)$ est une fonction. On obtient la condition $\lambda'(t) = \cos(t)\sin(t)$, donc par exemple $\lambda(t) = -\frac{1}{2}\cos^2(t)$. On obtient donc la solution particulière $t \mapsto -\frac{1}{2}\cos^2(t)/\sin(t)$. La solution générale de (E) est donc de la forme

$$t \mapsto \lambda/\sin(t) - \frac{1}{2}\cos^2(t)/\sin(t),$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

2 Equations d'ordre 2

Exercice 1

a) ED linéaire d'ordre 2 homogène, à coefficients constants. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$. le polynôme caractéristique est $X^2 - 5X + 6$, ses racines sont 2 et 3. Les solutions sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{3t}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) ED linéaire d'ordre 2 homogène, à coefficients constants. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 3X$, ses racines sont 0 et 3. Les solutions sont de la forme

$$t \mapsto \lambda + \mu e^{3t}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

c) ED linéaire d'ordre 2 homogène, à coefficients constants. Le polynôme caractéristique est $X^2 - 2X + 2$, ses racines sont $1 \pm i$. Les solutions sont de la forme

$$t \mapsto e^t(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)), \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

a) L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique $X^2 + 2X - 8$, dont les racines sont 2 et -4. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme

$t \mapsto \lambda e^{2t} + \mu e^{-4t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière de la forme $t \mapsto \alpha e^{3t}$: en injectant, on trouve $\alpha = 1/7$. Finalement, les solutions sont de la forme

$$t \mapsto e^{3t}/7 + \lambda e^{2t} + \mu e^{-4t}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique $X^2 - 3X - 18$, dont les racines sont -3 et 6. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $t \mapsto \lambda e^{-3t} + \mu e^{6t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche alors une solution particulière sous la forme $t \mapsto e^{4t}(\alpha t + \beta)$. En injectant dans l'équation, on a :

$$e^{4t}[(16\alpha t + 16\beta + 8\alpha - 3(\alpha + 4\alpha t + 4\beta) - 18(\alpha t + \beta)] = te^{4t},$$

autrement dit $16\alpha - 12\alpha - 18\alpha = 1$ et $16\beta + 8\alpha - 3\alpha - 12\beta - 18\beta = 0$, ce qui donne finalement $\alpha = -1/14$ et $\beta = -5/14^2$.

c) L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique $X^2 - 10X + 41$, dont les racines sont $5 \pm 4i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $t \mapsto e^{5t}(\lambda \cos(4t) + \mu \sin(4t))$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière de la forme $t \mapsto \alpha \sin(t) + \beta \cos(t)$. On obtient le système $40\alpha + 10\beta = 1$ et $40\beta - 10\alpha = 0$, c'est-à-dire $\alpha = 4/170$ et $\beta = 1/170$.

d) L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique $X^2 - X$, dont les racines sont 0 et 1. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $t \mapsto \lambda + \mu e^t$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $t \mapsto \alpha t^2 + \beta t$, et on trouve comme solution particulière $t \mapsto -\frac{t^2}{2} - 2t$.

e) L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 5$, dont les racines sont $1 \pm 2i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $t \mapsto e^t(\lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t))$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière sous la forme $t \mapsto (\alpha t + \beta)\cos(2t) + (\gamma t + \delta)\sin(2t)$. On trouve la solution particulière $t \mapsto \frac{2}{289}\cos(2t) + \frac{1}{17}t\cos(2t) - \frac{76}{289}\sin(2t) - \frac{4}{17}t\sin(2t)$, après la résolution du système linéaire.

f) L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique $X^2 - 6X + 9$, dont 3 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{3t}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par le cours, on sait que $t \mapsto 2t^2 e^{3t}$ est solution particulière.

g) L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique $X^2 - 2X + 2$, dont les racines sont $1 \pm i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $t \mapsto e^t(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t))$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour trouver une solution particulière, on applique le principe de superposition. Pour le premier bout, comme $1 + i$ est racine du polynôme caractéristique, on cherche une solution sous la forme $t \mapsto te^t((\alpha t + \beta)\cos(t) + (\gamma t + \delta)\sin(t))$. On trouve la solution particulière $t \mapsto -\frac{1}{4}te^t(t\cos(t) + \sin(t))$. Pour le second bout, on cherche une solution constante, et on trouve la solution constante $t \mapsto 3/2$. Finalement, la solution générale est de la forme

$$t \mapsto e^t(\lambda \cos(t) + \mu \sin(t)) + 3/2 - \frac{1}{4} t e^t (t \cos(t) + \sin(t)),$$

où λ et μ sont des réels.

Exercice 3

1) On commence par résoudre l'équation homogène sans conditions initiales : les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{2t}$. On cherche alors une solution particulière (sans conditions initiales), de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^t + \mu(t)e^{2t}$. Le wronskien vaut e^{3t}, on trouve alors

$$\lambda(t) = -\int \frac{e^{2t}}{1+e^t} dt = \ln(1+e^t) - e^t, \quad \text{et}$$

$$\mu(t) = \int \frac{e^t}{1+e^t} dt = \ln(1+e^t).$$

Une solution particulière est donc $e^t \ln(1+e^t) + e^{2t} \ln(1+e^t) - e^{2t}$. La solution générale est la somme de cette solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Ensuite, on détermine les constantes grâce aux conditions initiales.

2) On commence par résoudre l'équation homogène sans conditions initiales : les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu t e^{-2t}$. On cherche alors une solution particulière (sans conditions initiales), de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-2t} + \mu(t) t e^{-2t}$. Le wronskien vaut e^{-4t}, on trouve alors

$$\lambda(t) = -\int \frac{t}{(t-1)(t+2)} dt = -\frac{1}{3}\ln(1-t) - \frac{2}{3}\ln(t+2), \quad \text{et}$$

$$\mu(t) = \int \frac{1}{(t-1)(t+2)} dt = \frac{1}{3}\ln(1-t) - \frac{1}{3}\ln(t+2).$$

Ceci donne une solution particulière. On en déduit la solution générale. On ajuste enfin les constantes pour satisfaire aux conditions initiales.