Résumé de cours sur les équations différentielles.

Table des matières

1 Préliminaires et vocabulaire **2**

2 ED linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, homogènes **3**
2.1 Forme de l'équation 3
2.2 Exemples et contre-exemples 3
2.3 Résultats du cours 3
2.4 Exercice résolu 4

3 ED linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, homogènes **4**
3.1 Forme de l'équation 4
3.2 Exemples et contre-exemples 4
3.3 Résultats du cours 4
3.4 Exos résolus 5

4 ED linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, avec second membre **5**
4.1 Forme de l'équation 5
4.2 Résultats du cours 6
4.3 Liste d'exemples 7
4.4 Principe de superposition 7
4.5 Exemple d'application du principe de superposition 7

5 ED linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre **8**
5.1 Forme de l'équation 8
5.2 Exemples 8
5.3 Résultats du cours 8
5.4 Exercice résolu 9

6 ED linéaires d'ordre 1 à coefficients variables **9**
6.1 Premier cas : le coefficient dominant est égal à 1 9
6.2 Exo résolu 10
6.3 Coefficient dominant variable 10

7 Résumé - marche à suivre pour traiter une ED **10**
7.1 Coefs constants 10
7.1.1 Sans second membre 10
7.1.2 Avec second membre 10
7.2 Coefficients non constants 11
7.2.1 Sans second membre 11
7.2.2 Avec second membre 11

Ce qui suit est un résumé de cours sur les équations différentielles (ou équadiffs, ou ED), orienté vers la résolution d'exercices, sans preuves ou presque.

Un chapitre sur les équadiffs peut prendre plusieurs formes : liste de recettes de résolution, ou bien quelque chose de plus joli, qui met l'accent sur les systèmes dynamiques et sur les problèmes qualitatifs plutôt que sur la résolution : en fait, étant donnée une équadiff, il y a deux cas :
1) l'équation différentielle fait partie d'une très petite liste (qui vous semblera peut-être grande au

début), et on sait la résoudre explicitement ;
2) on ne sait pas résoudre l'équadiff ; il y a alors des outils théoriques de divers degrés de sophistication (de L1 jusqu'au niveau recherche) pour réussir à dire des choses sur les solutions, même sans avoir de formule. Dire des choses sur les solutions, c'est par exemple réussir à tracer un tableau de variations, savoir sire si la solution s'annule, si elle s'annule une infinité de fois, si elle est bornée, si on peut l'encadrer par des fonctions connues, si elle est définie sur $\mathbb{R}$ ou si au contraire elle « explose en temps fini », etc etc.

Vous croiserez des équadiffs tout au long de votre cursus, en maths bien sûr, mais aussi en physique, chimie, et sciences de l'ingénieur. Avec les équadiffs de ce semestre, on peut déjà étudier une grosse quantité de phénomènes physiques. Ici, on se focalise sur le côté « on résout des exos », je donnerai après des exercices supplémentaires qui viennent d'un contexte physique pour que vous voyez à quoi ça peut servir.

1 Préliminaires et vocabulaire

Une équation différentielle est une équation dont l'inconue est une fonction. Cette fonction est a priori définie sur une partie de $\mathbb{R}$, son domaine de définition, et est à valeurs réelles, ou complexes. Si on ne précise pas, l'inconnue est une fonction à valeurs réelles, et résoudre l'équation signifie trouver toutes les solutions à valeurs réelles.

La fonction inconnue est en général notée y (parfois f, ou même x). La variable est habituellement t. L'équation est une relation entre la fonction y, plusieurs de ses dérivées, et potentiellement d'autres fonctions. Un exemple simple est $y'(t) = \sin(t)$, un exemple plus compliqué est $\text{Arctan}(y(t)) + (y'(t))^2 = \sin^4(t)$.

On ne note pas toujours la variable t : par exemple, on peut parfois écrire $y' = \sin(t)$ ou $y'' + y' + 5y = \cos(t)$. Cet abus de notation est souvent toléré. En théorie, il faudrait écrire soit $y' = \sin$ (égalité de fonctions) ou bien alors $y'(t) = \sin(t)$ (égalité de réels, pour tout réel t).

Lorsque l'on écrit une équadiff que l'on va réutiliser, on lui donne en général un nom, souvent une lettre, par exemple :

$$(E) \quad 4y' + 5y = \cos(t),$$

Le symbole (E) sert à désigner l'équation. On peut par la suite écrire que « (E) admet des solutions », « (E) est linéaire », etc.

Lorsque l'on résout une équadiff, on cherche en général des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ le plus grand possible. Il n'existe pas toujours des solutions définies sur $\mathbb{R}$, pour des raisons diverses, évidentes ou pas. Exemple facile : l'équation différentielle $y' = \tan(t)$ n'a un sens que sur le domaine de définition de la fonction $t \mapsto \tan(t)$. Ca n'a donc pas de sens de chercher des solutions définies sur $\mathbb{R}$. Il y a parfois des raisons plus subtiles qui peuvent empêcher l'existence de solutions sur $\mathbb{R}$.

Une fois que l'on s'est fixé un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, résoudre l'équation sur I c'est trouver *toutes* les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation. L'ensemble de toutes les solutions peut être vide, fini, ou infini, et il est parfois paramétré par plusieurs paramètres réels, ou complexes. Par exemple, l'ensemble des solutions de l'équation $y'' = 0$ est l'ensemble (de fonctions) :

$$\{t \mapsto \lambda.t + \mu, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Une autre façon de rédiger est de dire que les solutions de cette équadiff sont de la forme $t \mapsto \lambda.t+\mu$, où λ et μ sont des réels.

Dans la suite, on va s'intéresser à une liste précise d'équations, que l'on peut résoudre assez facilement.

2 ED linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, homogènes

2.1 Forme de l'équation

Ce sont des équations différentielles du type :

$$(E) \quad ay' + by = 0,$$

où a et b sont des réels.

2.2 Exemples et contre-exemples

L'équation

$$3y' + 5y = 0$$

est une équadiff d'ordre 1 linéaire à coefficients constants, homogène. Les coefficients sont 3 et 5. On dit aussi « sans second membre », au lieu de « homogène ».

L'équation $3y' + 7y = \tan(t)$ est linéaire d'ordre un mais n'est pas homogène, elle a un second membre : $\tan(t)$. Les équations $y' = y^2$ et $y' = \sin(y)$ ne sont pas linéaires, elles dépendent de façon non linéaire de y. L'équation $y' + \cos(t).y = 0$ est linéaire d'ordre 1 mais un des coefficients ($\cos(t)$) n'est pas constant, c'est une fonction de t. L'équation $y'' + 3y' + 2y = 0$ est linéaire homogène à coefficients constants, mais de degré 2.

2.3 Résultats du cours

1) Il y a toujours au moins une solution sur $\mathbb{R}$: en effet, la fonction nulle est toujours solution.

2) Les solutions sur un intervalle quelconque peuvent toujours être prolongées en des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier. On résout donc l'équation sur $\mathbb{R}$, et les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

3) Si f est une solution sur $\mathbb{R}$ de (E), et que λ est un réel, alors $\lambda.f$ est également une solution. Preuve : on dérive, on voit que ça marche.

4) Si f et g sont deux solutions sur $\mathbb{R}$ de (E), alors leur somme est solution aussi. Preuve : dériver la somme, ça marche.

5) On en déduit que s'il y a deux solutions différentes, alors il y a une infinité de solutions.

6) Si a est un réel non nul, on peut diviser par a, ça ne change pas les solutions car les deux équadiffs sont équivalentes. On peut donc supposer que $a = 1$ et on se ramène au cas général suivant (la notation change donc légèrement) :

$$(E) \quad y' + b.y = 0$$

7) Il y a alors deux cas : si $b = 0$, l'équation est $y' = 0$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$. Si $b \neq 0$, il y a toujours une solution non nulle : la fonction $f : t \mapsto e^{-b.t}$ (vérifier en dérivant). Comme on a vu n'importe quel multiple de cette fonction f est également solution. Les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-b.t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, sont toutes des solutions de (E).

8) Théorème : toutes les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda.e^{-b.t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Preuve : soit f une fonction solution de (E) sur $\mathbb{R}$. On cherche donc à montrer la fonction $g : t \mapsto f(t).e^{b.t}$ est constante sur $\mathbb{R}$, et pour ça il suffit de montrer que sa dérivée est nulle. En dérivant g, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'égalité $g'(t) = (f'(t) + b.f(t)).e^{b.t}$ (formule de dérivation d'un produit). Donc $g' = 0$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ car précisemment f est solution de (E), et donc g est constante. Notons λ cette constante : on a donc, pour tout réel t, l'égalité $f(t).e^{b.t} = \lambda$, c'est-à-dire $f(t) = \lambda.e^{-b.t}$ comme annoncé.

2.4 Exercice résolu

Résoudre l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.
Solution : l'équation est équivalente à l'équatio $y' = -\frac{5}{3}y$. Les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda.e^{-\frac{5}{3}t}$, pour λ un réel quelconque. Autrement dit, l'ensemble S des solutions est de la forme

$$S = \{t \mapsto \lambda.e^{-\frac{5}{3}t}, \quad , \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3 ED linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, homogènes

3.1 Forme de l'équation

Ce sont les équations du type

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b, c sont des réels. On suppose que $a \neq 0$, sinon l'équation est en fait de degré 1.

3.2 Exemples et contre-exemples

L'équation

$$y'' + 2y' + 7y = 0$$

est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogène. Les coefficients sont 1, 2, 7. Par contre,

$$2y'' + 3y' + 4y = t.e^t$$

est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (2, 3, 4), mais pas homogène, il y a un second membre : te^t.

3.3 Résultats du cours

Certaines remarques faites pour le degré 1 sont encore valables, mais pas toutes.

1) Il y a toujours au moins une solution sur $\mathbb{R}$: la fonction nulle. Les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$.

2) Tout multiple d'une solution est solution. La somme de deux solutions est solution. Donc s'il y a deux solutions différentes, il y en a une infinité.

3) Le polynôme $aX^2 + bX + c$ est appelé le polynôme caractéristique de l'équation (E).

4) Soit α une racine complexe de $aX^2 + bX + c$. Alors la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{\alpha.t}$ est dérivable, et elle vérifie l'équation (E). On dit que c'est une solution complexe de (E). Par exemple, si α est en fait un réel, alors on a directement une solution. Évidemment, tous les multiples sont alors aussi solution.

5) Les solutions de (E) sont les suivantes :

- Si aX^2+bX+c a deux racines réelles distinctes α et β, alors les solutions réelles de (E) sont toutes de la forme
$$t \mapsto \lambda.e^{\alpha.t}+\mu.e^{\beta.t},$$
où λ et μ sont des réels.
- Si aX^2+bX+c a une racine double (qui est forcément réelle, car le polynôme est réel) notée α, alors les solutions réelles de (E) sont toutes de la forme
$$t \mapsto (\lambda t+\mu)e^{\alpha t},$$
où λ et μ sont deux réels.
- Si aX^2+bX+c a deux racines complexe conjuguées distinctes α et $\beta=\overline{\alpha}$, on peut présenter les choses de deux façons. D'une part, les solutions <u>complexes</u> de (E) sont de la forme
$$t \mapsto K.e^{\alpha t}+L.e^{\beta t},$$
où K et L sont des <u>complexes</u>. Parmi ces solutions à caleurs complexes, certaines sont en fait à valeurs réelles, très exactement si $K=\overline{L}$ car on se retrouve avec une expression du type $z+\overline{z}$. On obtient ainsi les solutions réelles. On peut aussi dire directement que les solutions <u>réelles</u> sont de la forme
$$t \mapsto e^{\,\mathrm{Re}\,(\alpha)t}\left(\lambda\cos(\,\mathrm{Im}\,(\alpha)t)+\mu\sin(\,\mathrm{Im}\,(\alpha)t)\right),$$
où K et L sont des <u>réels</u>. Il est conseillé d'écrire directement les solutions réelles.

Noter la ressemblance avec les suites récurrentes d'ordre 2.

3.4 Exos résolus

Exemple : résoudre l'ED $y''-y'-6y=0$.
Solution : le polynôme caractéristique de l'équation est X^2-X-6, ses racines sont -2 et 3. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'ED sont les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto \lambda.e^{-2t}+\mu.e^{3t}$, où λ et μ sont des nombres réels.

Exemple : résoudre l'ED $y''+4y'+4y=0$.
Solution : le polynôme caractéristique de l'équation est X^2+4X+4. Il a une unique racine double : -2. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation sont les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto (\lambda.t+\mu)e^{2t}$, où λ et μ sont des réels.

Exemple : résoudre l'ED $y''+4y'+13y=0$.
Solution : le polynôme caractéristique de l'équation est $X^2+4X+13$. Il a deux racines complexes imaginaires conjuguées $-2\pm 3i$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la forme $t \mapsto K.e^{-2t}\cos(3t)+L.e^{-2t}\sin(3t)$.

4 ED linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, avec second membre

4.1 Forme de l'équation

Le cas général est celui d'une équation
$$(E) \quad ay''+by'+cy=g(t),$$

où a, b et c sont des réels, et g est une fonction de la variable réelle t, définie sur une partie de $\mathbb{R}$. On résout l'équadiff sur un intervalle maximal I sur lequel le second membre est défini. On suppose ici que $a \neq 0$. Dans ce cas, quitte à diviser par a, on peut supposer que $a = 1$. On considère dans la suite l'équation

$$(E) \quad y'' + by' + cy = g(t).$$

4.2 Résultats du cours

Cas particulier

Si $b = 0$ et $c = 0$, l'équation est en fait $y''(t) = g(t)$. Ses solutions sont exactement les fonctions dont la dérivée second est g. Il suffit donc de primitiver deux fois de suite g, *en n'oubliant pas les constantes d'intégration* lorsqu'on primitive les deux fois. Par exemple, les solutions de l'équation $y'' = \sin(t)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto -\sin(t) + \lambda.t + \mu$, où λ et μ sont des réels.

Cas général

La technique est similaire à celle employée pour l'ordre 1 : il y a une équation homogène associée :

$$(E') \quad y'' + by' + cy = 0.$$

Cette nouvelle équadiff a un polynôme caractéristique associé $X^2 + bX + c$, et on sait résoudre complètement l'équadiff (E'), voir plus haut. Soit f une solution particulière de l'équation (E) sur I. Alors, toutes les solutions de (E) sur I sont la somme de f, et d'une solution de (E'). Il suffit donc là aussi de trouver une solution particulière de (E), et de résoudre (E'), pour déterminer toutes les solutions de (E).

Pour trouver des solutions particulière, on se restreint à un petit nombre de cas faciles. Le cas général ne sera pas traité ici.

Liste de seconds membres classiques On considère toujours l'équation (E). Dans ce paragraphe, on donne une courte liste de seconds membres, et la forme sous laquelle on cherche une solution particulière.

Si le second membre $g(t)$ est du type $e^{r.t}.P(t)$, où $P \in \mathbb{R}_d[X]$ est un polynôme de degré d, et r est un réel qui n'est pas racine du polynôme caractéristique, alors il existe une solution particulière sous la forme $e^{r.t}.Q(t)$, où Q est un polynôme de degré d.

Si le second membre $g(t)$ est du type $e^{r.t}.P(t)$, où $P \in \mathbb{R}_d[X]$ est un polynôme de degré d, et r est un réel qui est racine simple (mais pas double) du polynôme caractéristique, alors il existe une solution particulière sous la forme $e^{r.t}.Q(t)$, où Q est un polynôme de degré $d+1$, divisible par t.

Si le second membre $g(t)$ est du type $e^{r.t}.P(t)$, où $P \in \mathbb{R}_d[X]$ est un polynôme de degré d, et r est un réel qui est racine double du polynôme caractéristique, alors il existe une solution particulière sous la forme $e^{r.t}.Q(t)$, où Q est un polynôme de degré $d + 2$ qui vérifie $Q'' = P$.

Ces trois résultats restent valides dans le cas où r est un nombre *complexe* : ce qui est important, c'est de savoir si r est racines (complexe) simple, double, ou pas racine de du polynôme caractéristique. Le cas complexe permet de traiter les cas où le second membre comporte des termes trigonométriques.

Dans tous les cas, il s'agit de trouver explicitement le polynôme Q : on écrit que $e^{r.t}.Q(t)$ est solution de (E), on dérive une puis deux fois, et on identifie les coefficients. Ceci donne une système linéaire qui permet de trouver les coefficients de Q.

4.3 Liste d'exemples

L'équadiff $(E)\quad y''-y'-6y=te^t$ a pour polynôme caractéristique X^2-X-6, donc les racines sont -2 et 3. On cherche des solutions particulières de (E) sous la forme $e^t(\alpha.t+\beta)$.

L'équadiff $(E)\quad y''+4y'+13y=te^t$ a pour polynôme caractéristique X^2-X-6, donc les racines sont $-2\pm 3i$. On cherche des solutions particulières de (E) sous la forme $e^t(\alpha.t+\beta)$.

L'équadiff $(E)\quad y''-y'-6y=te^{-2t}$ a pour polynôme caractéristique X^2-X-6, donc les racines sont -2 et 3. On cherche des solutions particulières de (E) sous la forme $e^{-2t}(\alpha.t^2+\beta.t)$.

L'équadiff $(E)\quad y''+4y'+4y=te^t$ a pour polynôme caractéristique X^2+4X+4, donc -2 est racine double. On cherche des solutions particulières de (E) sous la forme $e^t(\alpha.t+\beta)$.

L'équadiff $(E)\quad y''+4y'+4y=te^{-2t}$ a pour polynôme caractéristique X^2+4X+4, donc -2 est racine double. Alors $t\mapsto e^t(t^3/6+t^2/2)$ est une solution particulière.

L'équadiff $(E)\quad y''+y=e^{2t}\cos(3t)=\operatorname{Re}(e^{(2+3i)t})$, et $2+3i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique X^2+1. On cherche des solutions particulières sous la forme $t\mapsto e^{2t}(\alpha.\cos(3t)+\beta.\sin(3t))$.

L'équadiff $(E)\quad y''+y=\cos(t)=\operatorname{Re}(e^{it})$, et i est racine simple du polynôme caractéristique X^2+1. On cherche des solutions particulières sous la forme $t\mapsto \alpha.t.\cos(t)+\beta.t.\sin(t)$.

4.4 Principe de superposition

Supposons que le second membre g de l'équation (E) soit la somme de deux fonctions g_1 et g_2, définies sur un intervalle I. Considérons les deux équations différentielles :

$$(E1)\quad y''+by'+cy=g_1(t),$$

$$(E2)\quad y''+by'+cy=g_2(t).$$

Si f_1 est une solution particulière de $(E1)$ sur I, et f_2 est une solution particulière de $(E2)$ sur I, alors f_1+f_2 est une solution particulière de (E) sur I. Ceci permet de simplifier la situation. Par exemple, pour trouver des solutions particulières de l'équadiff $y''+y'+y=\cos(t)+t^4$, on cherche une solution particulière de $y''+y'+y=t^4$, puis de $y''+y'+y=\cos(t)$, et on les ajoute, ce qui donne une solution particulière de $y''+y'+y=\cos(t)+t^4$.

4.5 Exemple d'application du principe de superposition

On se propose de résoudre l'équadiff

$$(E)\quad y''-y=\cos^2(t).$$

L'équation homogène associée (E') est $y''-y=0$, son polynôme caractéristique est $X^2-1=(X-1)(X+1)$, donc les solutions générales de l'équation homogène (E') sont de la forme $\lambda e^t+\mu e^{-t}$, où λ et μ sont des réels. Reste à trouver une solution particulière de (E). On linéarise le second membre : $\cos^2(t)=\frac{\cos(2t)+1}{2}=\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{1}{2}$. Par le principe de superposition, il suffit donc de trouver des solutions particulières des deux équadiffs $y''-y=\frac{1}{2}\cos(2t)$ et $y''-y=\frac{1}{2}$, puis de les sommer, pour récupérer une solution particulière de (E). Pour la première, $2i$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc on cherche les solutions sous la forme $t\mapsto\alpha.\cos(2t)+\beta.\sin(2t)$. En injectant, on trouve $-4\alpha\cos(2t)-4\beta\sin(2t)-\alpha.\cos(2t)-\beta.\sin(2t)=\frac{1}{2}\cos(2t)$, d'où $-5\alpha=\frac{1}{2}$ et $\beta=0$. Une solution particulière de la première équation est donc $t\mapsto-\frac{\cos(2t)}{10}$ (réflexe : vérifier). Pour la seconde équation, le second membre est un polynôme constant, on cherche une solution constante, on voit que $t \mapsto -\frac{1}{2}$ convient (vérification triviale). Finalement, une solution particulière de (E) est $t \mapsto -\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{10}$. Comme toujours, on vérifie le calcul. Finalement, les solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t} + -\frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{10}$, où λ et μ sont des réels.

5 ED linéaires d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre

5.1 Forme de l'équation

Il s'agit d'équations linéaires du type :

$$(E) \quad ay' + b.y = g(t).$$

où a, b sont réels et g est une fonction de la variable réelle t, parfois définie seulement sur certains intervalles.

5.2 Exemples

Par exemple, l'équation

$$(E1) \quad 2y' + 3y = \tan(t)$$

Si I est un intervalle sur lequel le second membre est défini, alors on peut rechercher des solutions de l'ED (E) sur I. Par exemple, ça n'aurait pas de sens de chercher des solutions sur $\mathbb{R}$ de $(E1)$, puisque le second membre $\tan(t)$ n'est pas défini sur $\mathbb{R}$. Si $a = 0$ il n'y a rien à faire ou presque. Sinon, quitte à diviser par a, on suppose que $a = 1$. On travaille donc avec l'équation

$$(E) \quad y' + b.y = g(t).$$

5.3 Résultats du cours

Cas particulier
Si $b = 0$, l'équation est en fait $y'(t) = g(t)$. ses solutions sont exactement toutes les primitives de g. On se ramène donc à un problème de primitives (qui peut cependant être difficile).

Cas général
A l'équation non homogène (E) , on peut associer l'équation homogène

$$(E') \quad y' + b.y = 0.$$

C'est une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, qui possède des solutions sur n'importe quel intervalle I : les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda.e^{-b.t}$, où λ est un réel. Alors, si $f : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation (E), toutes les solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto f(t) + \lambda.e^{-b.t}$, où λ est réel. Il suffit donc de trouver une solution particulière de (E), et toute les solutions de (E'), pour obtenir toutes les solutions de (E). Il s'agit donc de voir comment obtenir une solution particulière de (E).

Contrairement aux équation d'ordre 2, on ne donne pas ici une liste de cas classiques, mais une méthode générale, qui marche quelque soit le second membre : la méthode de la variation de la constante.

On s'inspire de la forme générale des solutions de l'équation homogène (E'), et on cherche des solutions particulières de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-bt}$, où $\lambda(t)$ est une fonction. On remplace alors y par $\lambda(t)e^{-bt}$, on dérive y sous cette forme avec la formule de dérivation des produits, et on trouve la fonction λ'. Ensuite, on calcule une primitive, ce qui donne un choix possible de λ.

5.4 Exercice résolu

Exemple : résoudre l'équadiff $(E) \quad y' + y = \sin(t)$.
Solution : on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée est $(E') \quad y + y' = 0$. Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $t \mapsto \lambda.e^{-t}$, où λ est un réel. Cherchons donc une solution particulière de (E) sous la forme $\lambda(t).e^{-t}$, où $\lambda(t)$ est maintenant une *fonction*.

Remplaçons donc y par $\lambda(t).e^{-t}$, dans l'équation (E). On obtient l'équation $\lambda'(t).e^{-t} - \lambda(t).e^{-t} + \lambda(t).e^{-t} = \sin(t)$ c'est-à-dire $\lambda'(t).e^{-t} = \sin(t)$ donc $\lambda'(t) = \sin(t).e^{t}$. Pour trouver $\lambda(t)$, il suffit donc de calculer une primitive de $\sin(t).e^{t}$, ce qui est facile en passant par les nombres complexes (voir cours sur les primitives). On obtient $\lambda(t) = \frac{e^t}{2}(\sin(t) - \cos(t))$. (À constante près, mais il suffit de prendre une primitive quelconque)

Donc *une* solution particulière de (E) est $t \mapsto \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t))$.

On en déduit enfin que les solutions de (E) sont de la forme :

$$t \mapsto \frac{1}{2}(\sin(t) - \cos(t)) + \lambda.e^{-t}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

(solution particulière de (E) trouvée grâce à la méthode de variation de la constante, plus solution générale de l'équation homogène (E'))

6 ED linéaires d'ordre 1 à coefficients variables

6.1 Premier cas : le coefficient dominant est égal à 1

Ce sont les équations du type :

$$(E) \quad y'(t) + b(t)y(t) = g(t),$$

où $b(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, continues.
L'équation homogène associée à (E) est :

$$(E') \quad y'(t) + b(t)y(t) = 0.$$

Soit $t \mapsto B(t)$ une primitive de $t \mapsto b(t)$. Alors, les solutions de (E') sont de la forme

$$t \mapsto \lambda e^{-B(t)},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f est une solution particulière de (E) sur I, alors les solutions de (E) sont de la forme $t \mapsto f + \lambda e^{-B(t)}$. (somme d'une solution particulière, et de la solution générale de (E')).

Pour trouver une solution particulière, on applique la méthode de la variation de la constante, c'est à dire que l'on cherche la solution particulière sous la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-B(t)}$, où λ est une fonction. On injecte dans (E), et on trouve la relation (faites le calcul et vérifiez) $\lambda'(t)e^{-B(t)} = g(t)$, c'est-à-dire $\lambda'(t) = g(t)e^{B(t)}$. Puis on primitive, ce qui donne $\lambda(t)$. On obtient ainsi la solution particulière $\lambda(t)e^{-B(t)}$.

6.2 Exo résolu

Résoudre (E) $\quad y' + ty(t) = t$.
Solution : la fonction $t \mapsto t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et une primitive en est $t \mapsto t^2/2$. L'équation homogène associée est $y' + ty(t) = 0$ et ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t^2/2}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche maintenant une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-t^2/2}$. On trouve donc la relation $\lambda'(t) = te^{t^2/2}$. Cette fonction est facile à primitiver, une primitive est $t \mapsto e^{t^2/2}$. Finalement, une solution particulière est la fonction constante $t \mapsto 1$. Les solutions de (E) sont donc de la forme

$$t \mapsto 1 + \lambda e^{-t^2/2}.$$

6.3 Coefficient dominant variable

Ce sont les équations du type :

$$(E) \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t).$$

Il y a deux cas. Soit la fonction $t \mapsto a(t)$ ne s'annule pas. Dans ce cas, on divise tout par $e(t)$ et on se ramène au cas précédent. Soit la fonction $t \mapsto a(t)$ s'annule. Dans ce cas, on se place sur un intervalle I sur lequel $a(t)$ ne s'annule pas, on divise par $a(t)$, puis on résout sur l'intervalle I. Ensuite, on essaye de recoller les bouts, on verra sans doute ça en TD.

7 Résumé - marche à suivre pour traiter une ED

On se donne une ED, notée (E). Normalement, (E) est linéaire d'ordre 1 ou 2. Il y a trois choses à faire pour bien commencer : déterminer l'ordre, savoir si l'ED est homogène ou pas (s'il y a un second membre, il faut déterminer son domaine de définition et de continuité), et savoir si les coefficients sont constants ou pas (s'ils sont variables, il faut déterminer leur domaine de définition et de continuité, et savoir si le coefficient dominant peut s'annuler ou pas). En fonction des réponses à ces questions, on fixe un intervalle I maximal sur lequel on résout l'ED.

7.1 Coefs constants

L'équation est du type

$$ay' + by = g(t) \quad \text{ou} \quad ay'' + by' + cy = g(t).$$

Le second membre $g(t)$ peut être nul, ou pas. On sépare les deux cas.

7.1.1 Sans second membre

L'équation est donc homogène, on peut résoudre (et donc on résout) sur $\mathbb{R}$. Dans le cas où l'équation est d'ordre 2, cela suppose de déterminer les racines du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$.

7.1.2 Avec second membre

On ne peut pas forcément résoudre sur $\mathbb{R}$, ça dépend du second membre. Se placer sur un intervalle maximal I contenu dans le domaine de définition et continuité du second membre, et résoudre sur I. Déterminer l'équation homogène associée et la résoudre, comme plus haut. Ensuite, on sait que les solutions générales sont somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée. Pour trouver une solution particulière, deux cas :

– soit l'équation est d'ordre 1 et on applique la méthode de variation de la constante,

- soit l'équation est d'ordre 2, et le second membre appartient avec un peu de chance à la liste donnée dans le cours, dans ce cas on cherche une solution particulière sous la forme donnée dans le cours. Si le second membre est somme de termes classiques, appliquer le principe de superposition. Si le second membre est un polynôme trigonométrique, linéariser et appliquer le principe de superposition.

7.2 Coefficients non constants

Dans ce cas, normalement l'équation est du type :

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t).$$

Si le coefficient dominant $a(t)$ n'est pas constant, on commence par se placer sur un intervalle sur lequel il est défini et ne s'annule pas, puis on divise tout par le coefficient dominant.

Ensuite, on se place sur un intervalle maximal I contenu dans le domaine de définition et de continuité des autres coefficients variables, et du second membre s'il y en a un. On résout l'ED sur I.

7.2.1 Sans second membre

S'il n'y a pas de second membre, la résolution se réduit à un calcul de primitive du coefficient variable.

7.2.2 Avec second membre

On commence par résoudre l'équation homogène associée, comme plus haut. Ensuite, on détermine une solution particulière avec la méthode de variation de la constante.