Université Henri Poincaré **Faculté des Sciences et Techniques**

Licence de Mathématiques **Automne 2011**

Calculs et Mathématiques
Épreuve du 16 Janvier 2012

Documents et calculatrices interdits. Durée 3 heures.
Il sera tenu compte de la **rigueur** *et de la* **clarté** *des démonstrations. Une présentation générale* **soignée** *sera* **appréciée***. Toute copie ressemblant à un brouillon sera* **pénalisée***.*

Exercice 1. Soient $P(X)$ un polynôme à coefficients réels de degré au moins 3 et a un réel quelconque fixé. On considère le polynôme $Q(X)$ défini par

$$Q(X) = \frac{1}{2}(X-a)\left[P'(X)+P'(a)\right] - P(X) + P(a).$$

Montrer que a est racine, au moins triple, du polynôme $Q(X)$.

Exercice 2.

1. Simplifier les deux expressions suivantes : $\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}\, x)$ et $\mathrm{th}(\mathrm{Argsh}\, x)$.
2. Calculer la primitive suivante, en effectuant éventuellement un changement de variable :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exercice 3.

1. Calculer la primitive suivante, sur $]0,+\infty[$:

$$\int \frac{t^2+t+4}{t^3+2t}dt\ .$$

2. Résoudre, sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$, l'équation différentielle

$$y'(t) + ty(t) = \frac{t^2+t+4}{t^3+2t}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y''(t) - 9y'(t) + 20y(t) = 442\sin(t) + 3t^2e^{4t}.$$

Tournez la page S.V.P.

Exercice 5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant pour tout $n \geq 1$ la relation

$$(R) \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{2} \; .$$

   (a) Exprimer en fonction de u_0, de u_1, et de n les valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Que vaut (en fonction de u_0 et u_1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs vérifiant pour tout $n \geq 1$ la relation

$$(R') \qquad v_{n+1} = \sqrt{v_n v_{n-1}} \; .$$

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \ln v_n$. Montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que pour tout $n \geq 1$, $w_{n+1} = a w_n + b w_{n-1}$.

   (b) Quelle est (en fonction de v_0 et v_1) la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (R') lorsque n tend vers l'infini (on commencera par chercher la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondante) ?

Exercice 6.

Résoudre, sur l'intervalle $I =]-\infty, 1[$, l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = \frac{e^t}{(t-1)^2\,(t-2)} \; , \qquad y(0) = 0 \; , \quad y'(0) = 1 \; .$$