Corrigé de l'interro 4

8 novembre 2011

Ce corrigé est plus détaillé que ce que l'on vous demande, et donne plusieurs méthodes alternatives. Ce qui est important, c'est de préciser si on fait la décomposition sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$, et à quel ensemble appartiennent les inconnues que vous introduisez. Si vous résolvez un système linéaire, indiquez quelles sont les opérations sur les lignes/colonnes que vous effectuez. À part ça, faites court, le sujet était faisable sur une copie simple en serrant un peu (vu sur une copie).

Points mal compris :

1) Fautes sur l'utilisation de la parité et de la conjugaison.

2) La décomposition sur $\mathbb{R}$ est mal comprise, en particulier les éléments simples de deuxième espèce, du type $\frac{aX+b}{Q^k}$, où Q est un polynôme de degré 2 sans racines réelles ; beaucoup écrivent $\frac{a}{Q^k}$, puis se retrouvent face à des systèmes linéaires sans solutions.

3) En cas de pôle multiple, la méthode standard (multiplication, évaluation) ne marche pas pour calculer toute une partie polaire, juste le terme de plus haut degré. Pour les autres, il faut d'autres méthodes, ou bien appliquer Taylor d'un coup.

4) Les formulations « on fait $X = 1$ », ou « on pose $X = 1$ », ne sont pas correctes. « On évalue en $X = 1$ » non plus. Le symbole X désigne le polynôme X, rien d'autre. L'assertion $X = 1$ a un seul sens, à savoir que le polynôme X est égal au polynôme 1, cette assertion est donc fausse. De même, lorsque vous cherchez les racines d'un polynôme, n'écrivez pas « $X^2 + 1 = 0$ si et seulement si $X = \pm i$ », mais : « un complexe α est racine de $X^2 + 1$ si et seulement si $\alpha^2 + 1 = 0$, donc si et seulement si $\alpha = \pm i$ ». Évitez de noter vos racines avec des x minuscule, vous risquez de confondre avec X par la suite.

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $R = \frac{4-3X}{(X+1)(X-1)(X-2)}$.

Correction — Le dénominateur est donné sous forme factorisée, on voit qu'il y a trois pôles : -1, 1, et 2, tous trois simples. Le degré de R est strictement négatif (il vaut -2), donc il n'y a pas de partie entière. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$R = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X-2},$$

où a, b, c sont des nombres réels. Pour les calculer, on peut bien sûr mettre l'expression ci-dessus au même dénominateur $(X+1)(X-1)(X-2)$, puis identifier le numérateur avec $4-3X$, ce qui donnera trois équations en les inconnues a, b, c. En résolvant le système, on trouve a, b, c (note : le théorème de décomposition implique au passage que ce système aura forcément une unique solution). Cependant cette méthode est déconseillée car trop calculatoire et favorise les erreurs, à chacune des deux étapes. Il est préférable d'appliquer la méthode standard expliquée dans le cours, comme ci-dessous.

En multipliant les deux membres par $X+1$, on obtient $\frac{4-3X}{(X-1)(X-2)} = a + b\frac{X+1}{X-1} + c\frac{X+1}{X-2}$, et -1 n'est plus pôle (c'est le but). On peut donc évaluer en -1, ce qui donne $a = 7/6$. De même, en multipliant les deux membres par $X-1$ et en évaluant en 1, on obtient $b = -1/2$. La même méthode donne enfin $c = -2/3$. Donc

$$R = \frac{7/6}{X+1} - \frac{1/2}{X-1} - \frac{2/3}{X-2}.$$

2. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{X^2}{(X-1)^3}$.

Correction — Le dénominateur est factorisé, on voit qu'il y a un seul pôle : 1, qui est triple. La partie entière est nulle car le degré de R est strictement négatif. La décomposition s'écrit :

$$R = \frac{X^2}{(X-1)^3} = \frac{a}{(X-1)^3} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)}.$$

Pour trouver a, b, et c, il y a plusieurs méthodes.

Première méthode. En multipliant les deux membres par $(X-1)^3$ et en évaluant en 1, on trouve $a = 1$. La même méthode ne marchera pas telle quelle pour b et c (pour chaque pôle, elle ne donne que la constant qui correspond au plus haut degré). Une façon de faire peut être de soustraire $\frac{1}{(X-1)^3}$ aux deux membres : on trouve alors $\frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)}$. Maintenant, on voit que l'ordre de 1 n'est plus que 2. On applique donc la méthode standard : on multiplie par $(X-1)^2$ et on évalue en 1, on trouve $b = 2$. Puis on recommence : on soustrait encore $\frac{2}{(X-1)^2}$, ce qui fait que 1 devient pôle simple, puis on trouve $c = 1$.

Deuxième méthode. On trouve a comme plus haut. Ensuite, on évalue en 0, qui n'est pas pôle. Cela donne $0 = -a + b - c$ donc $b - c = 1$. Il manque une équation. On pourrait évaluer en -1 par exemple, mais il y a mieux : en mulpliant par X et en prenant la limite en $+\infty$, on trouve directement $1 = c$. On trouve donc $b = 2$.

Troisième méthode. On suit le cours. En cas de pôle multiple, toute la partie polaire est calculée d'un seul coup en appliquant la formule de Taylor au numérateur, au pôle. Soit $P =$

X^2 le numérateur. La formule de Taylor donne $P = P(1)+P'(1)(X-1)+P''(1)(X-1)^2/2$. Les dérivées de P sont faciles à calculer et on trouve $X^2 = 1+2(X-1)+(X-1)^2$. En remplacant dans R, on trouve directement toute la partie polaire : $\frac{X^2}{(X-1)^3} = \frac{1+2(X-1)+(X-1)^2}{(X-1)^3} = \frac{1}{(X-1)^3} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)}$.

Quatrième méthode. Le numérateur étant un simple monôme, la formule du binôme donne facilement $X^2 = (X-1+1)^2 = 1+2(X-1)+(X-1)^2$. On finit comme plus haut.

3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $R = \frac{X^4+X^2}{X^4+1}$.

Correction — Le degré est nul, donc il y a une partie entière E, de degré 0, donc constante. Pour la trouver, on peut faire tendre vers $+\infty$, ce qui donne directement $E = 1$. Sinon, on peut aussi remarquer que $X^4 + X^2 = X^4 + 1 + X^2 - 1$, ce qui montre que $R = 1 + \frac{X^2-1}{X^4+1}$. Le même résultat peut être obtenu en effectuant la division euclidienne de $X^4 + X^2$ par $X^4 + 1$.

Le dénominateur n'est pas factorisé, mais ses racines sont déterminées dans le cours : ce sont les racines quatrièmes de -1. En les regroupant par paires conjuguées, on trouve la factorisation en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ du dénominateur $X^4 + 1 = (X^2 + X\sqrt{2} + 1)(X^2 - X\sqrt{2} + 1)$. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit donc :

$$R = \frac{X^4+X^2}{X^4+1} = 1 + \frac{aX+b}{(X^2+X\sqrt{2}+1)} + \frac{cX+b}{(X^2-X\sqrt{2}+1)}.$$

Comme souligné plus haut, la mise au même dénominateur et l'identification n'est pas la méthode la plus fiable.

Première méthode. En multipliant les deux membres par $(X^2+X\sqrt{2}+1)$ puis en évaluant en une racine α de $X^2 + X\sqrt{2} + 1$, on peut trouver d'un coup a et b, en identifiant les parties réelles et imaginaires. Rappelons (et voir correction de la question 7) qu'il n'est pas nécessaire pour cela de calculer explicitement α, même si c'est possible dans ce cas. On peut ensuite faire pareil pour c et d.

Deuxième méthode : On commence par remarquer que R est paire : $R(X) = R(-X)$. Dans la décomposition, cela donne

$$\frac{aX+b}{(X^2+X\sqrt{2}+1)} + \frac{cX+b}{(X^2-X\sqrt{2}+1)} = \frac{-aX+b}{(X^2-X\sqrt{2}+1)} + \frac{-cX+b}{(X^2+X\sqrt{2}+1)},$$

d'où on tire, par unicité de la décomposition en éléments simples, que $a = -c$ et $b = d$. La limite en $+\infty$ ne fait que redonner la relation $0 = a + c$ qu'on connait déjà. Par contre, l'évaluation en 0 donne $b+d = -1$. On peut enfin évaluer en un dernier point, par exemple en 1, ce qui donne $0 = (2+\sqrt{2})(a+b) + (2-\sqrt{2})(c+d)$. Ces quatre équations (assez simples) permettent de trouver $a = -c = 1/\sqrt{2}$, et $b = d = -1/2$.

Troisième méthode. On décompose la fraction sur $\mathbb{C}$: il y a quatre pôles simples, donc quatre constantes complexes à trouver, par la méthode standard. De plus, on peut utiliser que R est réelle, c'est-à-dire $R = \overline{R}$, ce qui fait qu'on se ramène à trouver seulement deux constantes. Ensuite, à partir de la décomposition sur $\mathbb{C}$, on regroupe les pôles conjugués. Voir le corrigé de la question 5.

4. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $R = \frac{X^3}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

Correction — La partie entière est nulle car le degré est -1. Le dénominateur n'est pas factorisé sur $\mathbb{C}$ mais les pôles se voient directement et sont $\pm i$, $\pm 2i$. La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ s'écrit donc :

$$R = \frac{X^3}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{X^3}{(X-i)(X+i)(X-2i)(X+2i)} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i} + \frac{c}{X-2i} + \frac{d}{X+2i},$$

où les scalaires a, b, c et d sont des *complexes*. Pour faire baisser le nombre d'inconnues, on peut remarquer que la fraction rationnelle R est réelle : $R = \overline{R}$, ce qui donne, dans la décomposition :

$$R = \overline{R} = \frac{\overline{a}}{X - \overline{i}} + \frac{\overline{b}}{X + \overline{i}} + \frac{\overline{c}}{X - 2\overline{i}} + \frac{\overline{d}}{X + 2\overline{i}}$$

$$\text{c'est-à-dire } R = \frac{\overline{a}}{X+i} + \frac{\overline{b}}{X-i} + \frac{\overline{c}}{X+2i} + \frac{\overline{d}}{X-2i},$$

et donc, par unicité de la décomposition sur $\mathbb{C}$, on a $b = \overline{a}$ et $d = \overline{c}$. On pourrait aussi remarquer que R est impaire : $R(-X) = -R(X)$, ce qui donne $a = b$ et $c = d$. Les inconnues se calculent par la méthode habituelle, par exemple, en multipliant les deux membres par $(X-i)$ puis en évaluant en i, on trouve $a = -1/6$ (et du coup $b = -1/6$). On peut appliquer la même méthode pour trouver c et donc d. Remarquez que la limite en $+\infty$ donne aussi la relation $1 = a+b+c+d$, ce qui suffit aussi à trouver les inconnues manquantes : $c = d = 2/3$.

5. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{X^3}{(X^2+1)(X^2+4)}$.

Correction — La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrit

$$R = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{X^2+4},$$

où a, b, c, d sont cette fois des réels.

Première méthode. On peut multiplier les deux membres par X^2+1 puis évaluer en une des deux racines de X^2+1 (le fait de savoir que c'est i ou $-i$ permet d'aller un peu plus vite mais n'est pas nécessaire). En identifiant partie réelle et imaginaire, on trouve d'un seul coup a et b. Puis on fait pareil pour l'autre élément simple.

Deuxième méthode. On peut aussi mettre à profit que l'on vient de calculer, dans la question précédente, la décomposition sur $\mathbb{C}$. On a en effet :

$$R = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{c}{X-2i} + \frac{d}{X+2i}\right),$$

en mettant les termes entre parenthèses au même dénominateur X^2+1 et X^2+4, on trouve

$$R = -\frac{1}{3}\frac{X}{X^2+1} + \frac{4}{3}\frac{X}{X^2+4}.$$

6. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{X^2}{(X^2+1)^2}$.

Correction — La décomposition sur $\mathbb{R}$ s'écrit a priori :

$$\frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+1} + \frac{cX+d}{(X^2+1)^2},$$

où a, b, c, d sont des réels.

Première méthode. On a $X^2 = X^2+1-1$, ce qui donne

$$\frac{X^2}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{(X^2+1)^2}$$

On constate que c'est une décomposition en éléments simples, c'est donc la bonne : $a = c = 0$, $b = 1$, $d = -1$.

Deuxième méthode. Comme R est paire, on a $a = -a$ et $c = -c$, donc $a = c = 0$. Ensuite, en multipliant par X^2 en en prenant la limite en $+\infty$, on obtient $b = 1$. On trouve d en évaluant en 0 par exemple.

Troisième méthode. On peut trouver c et d en multipliant tout par $(X^2+1)^2$ et en évaluant en i, puis en identifiant partie réelle et imaginaire. On trouve ensuite a et b en évaluant, ou d'une autre façon.

7. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\frac{X+1}{(X-1)(X^2-2X+2)}$.

Le dénominateur est factorisé sur $\mathbb{R}$. La décomposition s'écrit

$$\frac{X+1}{(X-1)(X^2-2X+2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2-2X+2},$$

où a, b, c sont des réels. On trouve facilement $a = 2$. Pour l'autre élément simple, multiplions les deux membres par X^2-2X+2, et évaluons en une racine α de X^2-2X+2. On trouve

$$b\alpha + c = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}.$$

On pourrait calculer explicitement α, mais ce n'est pas nécessaire, il sufit d'utiliser la relation $\alpha^2 = 2\alpha - 2$ une fois de plus, comme expliqué en cours. On a donc

$$\alpha + 1 = (\alpha - 1)(b\alpha + c) = b\alpha^2 + \alpha(c - b) = b(2\alpha - 2) + \alpha(c - b),$$

$$\text{et donc } \alpha(b + c - 1) - 2b - c - 1 = 0.$$

De plus la même relation est vraie en remplaçant α par $\overline{\alpha} \neq \alpha$, l'autre racine de X^2-2X+2. En soustrayant, on obtient $2\,\mathrm{Im}\,(\alpha)(b+c-1) = 0$ donc $b+c = 1$. En reprenant la première équation, on voit que $2b+c+1 = 0$. La résolution de ce système 2×2 donne $b = 2$ et $c = 3$. Bien sûr, on peut aller un peu plus vite ici car les racines sont $1 \pm i$, mais cette méthode marche quand même lorsque les racines ont une forme peu agréable.

8. Soit n un entier plus grand que 4. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{X^3}{(X-1)^n}$.

Correction — On applique Taylor, ou le binôme, ce qui donne $X^3 = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 + 3(X-1) + 1$, et du même coup la décomposition de R.