

## Interrogation 5 — Durée 30 minutes

Rendez demain ce que vous n'avez pas (ou mal) fait  
aujourd'hui

1. Résoudre  $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ , d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

2. Sans calculer explicitement les constantes ni les parties entières, donner la forme de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  des fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^6}{(X^2 + 2)(X^2 - 2)}, \quad \frac{1}{(X - 1)(X + 1)^4}, \quad \frac{X^4 + 5X - 7}{X(X^2 + 1)^3}.$$

3. Résoudre  $\begin{cases} x + y - z + 2t = 1 \\ -x + y + 2z + 3t = 2 \end{cases}$ , d'inconnue  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

4. À quelle condition sur les réels  $a, b, c$ , le système  $\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y - z = b \\ 4x - y + 2z = c \end{cases}$  d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , admet-il au moins une solution ? On ne demande *pas* de résoudre le système.

5. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. On considère le système  $\begin{cases} ax + y = 1 \\ bx + y = 2 \end{cases}$ , d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Suivant les différents cas possibles pour  $a$  et  $b$ , préciser le rang du système et le résoudre.

6. Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  la fraction rationnelle  $R = \frac{4X^4}{(X^4 - 1)^2}$ .

Indication 1 : il y a huit réels à trouver. Indication 2 : étudier la parité de  $R$  d'abord.

7. Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  la fraction rationnelle  $\frac{X^3 + X}{(X - 1)^{30}}$ .