Corrigé de l'interro 5

1. Pivot de Gauss. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Alors,

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1\\ x & +y & +z & = & 2\\ x & -y & -z & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x & +y & -z & = & 1 & \\ & \frac{1}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} & L_2\leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1\\ & -\frac{3}{2}y & -\frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} & L_3\leftarrow L_3-\frac{1}{2}L_1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x & +y & -z & = & 1 & \\ & \frac{1}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} & \\ & & 4z & = & 4 & L_3\leftarrow L_3+3L_2\end{array}\right.$$

[Parenthèse : Ceci est une forme échelonnée, le rang est égal à 3, les pivots sont 2, $\frac{1}{2}$, 4. On constate que le système est triangulaire supérieur, à termes diagonaux non nuls. Il admet donc une unique solution.]

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1\\ & \frac{1}{2}y & & = & \frac{3}{2}-\frac{3}{2}z\\ & & z & = & 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x & = & 1+z-y\\ y & = & 0\\ z & = & 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1\\ y & = & 0\\ z & = & 1\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions du système est $S=\{(1,0,1)\}$.

2. Attention, le premier dénominateur n'était pas factorisé en produit de facteurs irréductibles. D'après le cours, les décompositions en éléments simples sur $\mathbb{R}$ s'écrivent :

$$\frac{X^6}{(X^2+2)(X^2-2)}=E+\frac{aX+b}{X^2+2}+\frac{c}{X+\sqrt{2}}+\frac{d}{X-\sqrt{2}} \text{ où } a,b,c,d\in\mathbb{R},\ E\in\mathbb{R}[X].$$

$$\frac{1}{(X-1)(X+1)^4}=\frac{a}{X-1}+\frac{b}{(X+1)^4}+\frac{c}{(X+1)^3}+\frac{d}{(X+1)^2}+\frac{e}{(X+1)} \text{ où } a,b,c,d,e\in\mathbb{R}.$$

$$\frac{X^4+5X-7}{X(X^2+1)^3}=\frac{a}{X}+\frac{bX+c}{(X^2+1)^3}+\frac{dX+e}{(X^2+1)^2}+\frac{fX+g}{(X^2+1)} \text{ où } a,b,c,d,e,f,g\in\mathbb{R}.$$

3. Pivot de Gauss. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. Alors

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -z & +2t & = & 1\\ -x & +y & +2z & +3t & = & 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrcrl} x & +y & -z & +2t & = & 1 & \\ & 2y & +z & +5t & = & 3 & L_2\leftarrow L_2+L_1\end{array}\right.$$

[Parenthèse. Ceci est une forme échelonnée. Le rang est 2, les pivots sont 1 et 2. Les deux équations sont principales. Les inconnues x et y sont principales, z et t sont auxiliaires et peuvent (vont) servir à paramétrer l'ensemble des solutions.]

$$\Leftrightarrow \left(\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} \,/\, \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -z & +2t & = & 1\\ & 2y & +z & +5t & = & 3\\ & & z & & = & \lambda\\ & & & t & = & \mu\end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} \,/\, \left\{\begin{array}{rcl} x & = & (-1+3\lambda+\mu)/2\\ y & = & (3-\lambda-5\mu)/2\\ z & = & \lambda\\ t & = & \mu\end{array}\right.\right)$$

L'ensemble des solutions est

$$S=\left\{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

4. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors, (pivot)

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & a \\ x & +2y & -z & = & b \\ 4x & -y & +2z & = & c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcr} x & -y & +z & = & a \\ & 3y & -2z & = & b-a \\ & 3y & -2z & = & c-4a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & a \\ & 3y & -2z & = & b-a \\ & & 0 & = & c-b-3a \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2. Il y a une inconnue auxiliaire, z, et une équation auxiliaire : $0 = c - b - 3a$, qui peut être vérifiée ou pas, en fonction de a, b, c. Le système admet des solutions si et seulement si cette équation est vérifiée, donc ssi $c - b - 3a = 0$. Dans ce cas, il y a une infinité de solutions.

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux nombres réels. Alors (pivot...)

$$\left\{\begin{array}{rrcl} ax & +y & = & 1 \\ bx & +y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lrcll} y & +ax & = & 1 & \\ & (b-a)x & = & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

Il y a deux cas.
Si $b = a$, le système est de rang 1, l'inconnue y est principale et x est auxiliaire. De plus on a une équation auxiliaire $0 = 1$, donc le système n'a pas de solutions.
Si $b \neq a$, on a un système 2×2 triangulaire supérieur à termes diagonaux non nuls, donc il admet une unique solution (note : le rang est 2). Dans ce second cas, on finit la résolution comme d'habitude, en remarquant qu'on peut diviser par $b - a$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y + ax & = & 1 \\ (b-a)x & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 - ax \\ x & = & 1/(b-a) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & (b-2a)/(b-a) \\ x & = & 1/(b-a) \end{array}\right.$$

6. On a $R = \frac{4X^4}{(X^4-1)^2} = \frac{4X^4}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+1)^2}$. La décomposition s'écrit

$$R = \frac{aX+b}{(X^2+1)^2} + \frac{cX+d}{(X^2+1)} + \frac{e}{(X+1)^2} + \frac{f}{(X+1)} + \frac{g}{(X-1)^2} + \frac{h}{(X-1)},$$

avec $a, ..., h$ des réels. On remarque que R est paire : $R(X) = R(-X)$, c'est-à-dire :

$$R = \frac{-aX+b}{((-X)^2+1)^2} + \frac{-cX+d}{((-X)^2+1)} + \frac{e}{(-X+1)^2} + \frac{f}{(-X+1)} + \frac{g}{(-X-1)^2} + \frac{h}{(-X-1)}$$

D'où on tire, par unicité de la décomposition en éléments simples : $a = -a$ et $c = -c$ (donc $a = c = 0$), puis $e = g$, $f = -h$. Il ne reste plus que quatre constantes à calculer. En multipliant par $(X-1)^2$ et en évaluant en 1 on trouve $e = g = 1/4$, puis en multipliant par $(X^2+1)^2$ et en évaluant en i, on obtient $b = 1$. Ensuite, il ne reste plus que d et f ; on peut par exemple évaluer en 0 et en 2, ce qui donne deux équations et permet de trouver $f = -1/4$ et $d = -1$.

7. La formule de Taylor au point 1 appliquée au numérateur $X^3 + X$ donne $X^3 + X = (X-1)^3 + 3(X-1)^2 + 4(X-1) + 2$. En divisant par $(X-1)^{30}$ et en simplifiant ce qui peut être simplifié, on obtient directement la décomposition en éléments simples demandée.