Révisions I
Équations différentielles

Équations d'ordre 1

1) Résoudre l'équation différentielle (préciser le ou les intervalles de résolution)

$$2xy' - y = \frac{2}{3}x^{3/2}.$$

2) On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy' + 2y = \mathrm{Arctan}x.$$

a) Résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ qui vérifient l'équation.

b) Parmi ces dernières, une seule peut se prolonger en une fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. En utilisant la question précédente, calculer ses limites et des dérivées à gauche et à droite en 0, puis donner une formule pour f.

3) On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'\mathrm{sh}(x) - \frac{y}{\mathrm{ch}x} = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}x}.$$

a) a) Résoudre sur $\mathbb{R}_-^*$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ qui vérifient l'équation.

b) Parmi ces dernières, certaines peuvent se prolonger en des fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant (E). Quelles sont-elles (voir exercice précédent) ?

Équations d'ordre 2

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - 6ty' + 9y = e^{3t} + \sin(t).$$

2) On considère l'équation

$$(E1) \quad y''(t) - 4y'(t) + 29y(t) = 0.$$

a) Résoudre $(E1)$ sur $\mathbb{R}$.
b) Interlude : résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E2) \quad y''(t) - 4y'(t) + 29y(t) = 29t^2 + 50t + 81.$$

c) Le but de cette troisième question est d'étudier l'équation différentielle

$$(E3) \quad t^2y''(t) - 3ty'(t) + 29y(t) = 0.$$

C'est une équation d'ordre 2, à coefficients variables, et le coefficient dominant s'annule en 0. En utilisant la première question, trouver toutes les solutions de $(E3)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui sont de la forme $y(t) = f(\ln(t))$, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable (à déterminer).

3) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 1/cos(t)$, en appliquant la méthode de variation des constantes pour les équations d'ordre 2.

Solution : Notons g(t) le second membre. Une base de solutions de l'équation homogène est $y_1(t) = \cos(t)$ et $y_2(t) = \sin(t)$. On cherche une solution particulière sous la forme $\lambda(t)\cos(t) + \mu(t)\sin(t)$. Le wronskien est la fonction $W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Alors, $\lambda(t)$ est une primitive de $-\tan(t)$ et $\mu(t)$ est une primitive de 1. On obtient $\lambda = \ln(\cos(t))$ et $\mu(t) = t$. Un e solution particulière est donc $t \mapsto \cos(t)\ln(\cos(t)) + t\sin(t)$.