Révisions II
Suites récurrentes

À savoir faire très rapidement

1) Donner la forme générale des suites réelles qui vérifient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer entièrement celle qui vérifie de plus $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{7}{3}u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.

5) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{7}{9}u_{n+1} + \frac{2}{7}u_n$. Exprimer u_n en fonction de n.

Paramètres

1) Soient $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de n, u_0, et u_1. À quelle condition sur u_0 et u_1 est-ce que la suite reste bornée ?

2) Soient $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de n, u_0, et u_1. Suivant les différentes valeurs possibles pour u_0 et u_1, étudier la suite (en particulier, donner la limite dans les cas où il y en a une).

3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = \lambda$, et $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de n et λ. Suivant les différentes valeurs possibles pour λ, étudier la suite (en particulier, donner la limite dans les cas où il y en a une).

4) Soit $a \in \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et $u_{n+2} = (a+2)u_{n+1} - 2au_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de n et a, suivant les valeurs de a. Suivant les valeurs de a, étudier la suite (en particulier, donner la limite dans les cas où il y en a une).

Suites récurrentes « avec second membre »

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 24 \cdot 5^n.$$

a) Trouver un réel a tel que la suite $v_n = a.5^n$ vérifie la relation de récurrence (mais pas forcément les conditions initiales).

b) Soit (w_n) la suite définie pour tout n par $w_n = u_n - v_n$ Calculer w_{n+1} et w_{n+2}, en déduire en la suite (w_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Exprimer w_n en fonction de n.

c) Exprimer enfin u_n en fonction de n.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 2^n.$$

a) Trouver un réel a tel que la suite $v_n = an2^n$ vérifie la relation de récurrence (mais pas forcément les conditions initiales).

b) Faire comme plus haut et terminer l'exercice.