Rappels sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

28 décembre 2011

Soient $a \neq 0$, b, c des réels, u_0 et u_1 deux autres réels. On étudie ici la suite de nombres réels définie pour tout $n \geq 0$ par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 du type :

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

Le polynôme caractéristique de la suite est $P = aX^2 + bX + c$. Notons α et β ses racines complexes. Il y a trois cas :

- Les racines sont réelles distinctes : dans ce cas, il existe des <u>réels</u> λ et μ tels que pour tout n, on ait $u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$. Pour trouver λ et μ, on teste sur $n = 0$ et $n = 1$, ça donne un système linéaire à deux équations et deux inconnues λ et μ Ce système admet une unique solution, et on obtient λ et μ en fonction de u_0 et u_1, qu'ils soient donnés explicitement ou considérés comme des paramètres. Enfin, on n'oublie pas de vérifier le calcul en calculant à la main u_2 et u_3 avec la formule de récurrence, et en comparant avec la formule trouvée.

- Les racines sont identiques, autrement on a une racine double réelle α. Dans ce cas, il existe des <u>réels</u> λ et μ tels que pour tout n, on ait $u_n = (\lambda n + \mu)\alpha^n$. Pour trouver λ et μ, idem. Vérification idem.

- Dernière possibilité, les racines sont complexes conjuguées. Dans ce cas, il existe des <u>complexes</u> λ et μ tels que pour tout n, on ait $u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$. Pour trouver λ et μ, idem. Notez que comme u_0 et u_1 sont réels, la suite est réelle, et donc on doit forcément trouver $\lambda = \overline{\mu}$. On peut s'arreter là et laisser la forme complexe, mais on peut aussi reconnaître une expression du type $z + \overline{z}$ et écrire ça avec des cosinus et des sinus (voir la correction du partiel). Autre façon de rédiger, plus directe : en notant $u \pm iv$ les deux racines complexes conjuguées, il existe deux <u>réels</u> K et L tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n = u^n(K\cos(vn) + L\sin(vn))$. Vous pouvez vérifier que les deux méthodes donnent le même résultat. Vérification idem.

Si u_0 et u_1 étaient donnés explicitement, c'est fini, on a la formule exacte pour u_n en fonction de n.

S'ils ne sont pas donnés explicitement, ils doivent donc être considérés comme des paramètres. On peut alors vous demander par exemple pour quelles valeurs de u_0 et u_1 est-ce que la suite converge/diverge/reste bornée/tend vers $+\infty$ etc. Ce genre de question ne fait appel en général qu'à votre cours de terminale sur les suites géométriques. Par exemple, la suite $u_n = p.2^n + q.\left(\frac{1}{3}\right)^n$, qui dépend des paramètres p et q, est convergente si et seulement si $p = 0$.

Pas d'exercices, ceux faits en classe plus la correction du partiel suffisent largement, refaites-les / posez des questions si besoin, n'en faites pas 50. La seule difficulté peut venir de la discussion sur les paramètres, il ne faut oublier aucun cas.