1) Résoudre $\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ x & -y & -z & = & 0 \end{array}\right.$, d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Solution Mettons le système sous forme échelonnée :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ x & -y & -z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcrl} 2x & +y & -z & = & 1 & \\ & \frac{3}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} & (L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1) \\ & -\frac{3}{2}y & -\frac{1}{2}z & = & -\frac{1}{2} & (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} 2x & +y & -z & = & 1 & \\ & \frac{3}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} & \\ & & z & = & 1 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

Le système est de rang 3. Toutes les équations sont principales, toutes les inconnues sont principales. Le système est triangulaire supérieur, à termes diagonaux non nuls (ce sont les pivots : 2, $\frac{3}{2}$ et 1). Il est donc inversible, autrement dit, il possède une unique solution. Elle est obtenue par substitution, en partant du bas du système :

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1 \\ & \frac{3}{2}y & +\frac{3}{2}z & = & \frac{3}{2} \\ & & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -z & = & 1 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} x & & & = & 1 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 1 \end{array}\right.$$

L'unique triplet $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ solution du système est $(1,0,1)$. Autre façon de conclure : soit $S\subset\mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions du système. Alors, on a $S=\{(1,0,1)\}$.

2) Résoudre $\left\{\begin{array}{rrcl} 2x & +3y & = & 1 \\ x & -y & = & 2 \\ x & +y & = & 3 \end{array}\right.$, d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Solution Mettons le système sous forme échelonnée :

$$\left\{\begin{array}{rrcl} 2x & +3y & = & 1 \\ x & -y & = & 2 \\ x & +y & = & 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} x & -y & = & 2 \\ 2x & +3y & = & 1 \\ x & +y & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcrl} x & -y & = & 2 & \\ & 5y & = & -3 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ & 2y & = & 1 & (L_3 \leftarrow L_2 - L_1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcrl} x & -y & = & 2 & \\ & 5y & = & -3 & \\ & 0 & = & -11 & (L_3 \leftarrow 2L_2 - 5L_1) \end{array}\right.$$

Le rang du système est 2. Les pivots sont 1 et 5. Il y a deux inconnues principales : x et y, et pas d'inconnue auxiliaire. Les deux premières équations sont les équations principales, et il y a une équation auxiliaire : $0=-11$, ce qui montre que le système n'admet pas de solutions.

3) Résoudre $\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +2y & -z & +t = & 1 \\ 2x & -y & +z & -t = & 2 \end{array}\right.$, d'inconnue $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

Solution Mettons le système sous forme échelonnée :

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +2y & -z & +t = & 1 \\ 2x & -y & +z & -t = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrl} x & +2y & -z & +t = & 1 & \\ & -5y & +3z & -3t = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2. Les pivots sont 1 et -5. Les inconnues x et y sont principales, les inconnues auxiliaires sont z et t. Il n'y a pas d'équation auxiliaire. On sait qu'il y a une infinité de solutions, dont une unique solution de la forme $(x, y, 0, 0)$. Pour trouver la forme générale des solutions, on traite les variables auxiliaires comme des paramètres, en fonction desquels on exprime les inconnues principales. On écrit donc :

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} x & +2y & -z & +t = & 1 \\ & -5y & +3z & -3t = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +2y & -z & +t & = & 1 \\ & -5y & +3z & -3t & = & 0 \\ & & z & & = & \lambda \\ & & & t & = & \mu \end{array}\right.\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{rrrrcl} x & +2y & -\lambda & +\mu & = & 1 \\ & -5y & +3\lambda & -3\mu & = & 0 \\ & & z & & = & \lambda \\ & & & t & = & \mu \end{array}\right.\right) \Leftrightarrow \left(\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{rcrrr} x & = & 1 & -\frac{1}{5}\lambda & +\frac{1}{5}\mu \\ y & = & & \frac{3}{5}\lambda & -\frac{3}{5}\mu \\ z & = & & \lambda & \\ t & = & & & \mu \end{array}\right.\right)$$

(x a été obtenu en remplaçant dans L_1 la variable y par sa valeur en fonction de λ et μ). L'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5}\lambda & +\frac{1}{5}\mu \\ & \frac{3}{5}\lambda & -\frac{3}{5}\mu \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il est conseillé d'écrire l'ensemble des solutions sous la forme :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$