

Liste d'exercices n°0 : Rudiments de fonctions usuelles

1. Dire lesquelles des propositions suivantes sont vraies. Lorsqu'elles sont fausses, le prouver par un contre-exemple.

(a) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{x-y} = a^x/a^y$;

(b) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{(x^y)} = a^{xy}$;

(c) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{2xy} = a^{x^2} a^{y^2}$;

(d) $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{-x+y/2} = \sqrt{a^y}/a^x$;

(e) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(\sqrt{a/b}) = (1/2)(\ln(a) - \ln(b))$;

(f) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(a^b) = \ln(a)^{\ln(b)}$;

(g) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(ab/2) = \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$;

(h) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln((a^2)^b) = 2b \ln(a)$;

(i) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(a^2/b^2) = -2 \ln(ab)$;

(j) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \ln(a^2/b) = \ln(a) - \ln(b/a)$.

2. Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(x+1)^2 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2; \quad |x-1| = 2x+3; \quad (e^x)^2 = 2; \quad (\cos(x) + 1/2)^2 = 1; \quad (e^x + 1/2)^2 = 1$$

3. Résoudre sur \mathbb{R}_+^* les équations suivantes :

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x; \quad 2^x = (3^x)/2; \quad x^x = \sqrt{x}.$$

4. Dire sur quel domaines de \mathbb{R} les équations suivantes ont un sens et les résoudre :

$$\ln(x) = \ln(x+5) - \ln(2); \quad \ln(x) = \ln(x+5) + \ln(2); \quad \ln(2x+1) + \ln(x-2) = \ln(x);$$

$$\ln(x) = \ln(5-x) + \ln(3); \quad \ln(x) = \ln(5-x) + \ln(6); \quad (\ln(x))^2 = 2.$$

5. Calculer les quantités suivantes :

$$\sin(15\pi/2); \quad \cos(9\pi/2); \quad \sin(7\pi/4); \quad \cos(-4\pi/3); \quad \sin(-7\pi/6); \quad \cos(-7\pi/4); \quad \cos(11\pi/6).$$

6. Soit x un réel. Écrire en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les quantités suivantes :

$$\sin(x - 7\pi/2); \quad \sin(x + 5\pi); \quad \sin(x + 11\pi/2); \quad \cos(7\pi - x) \sin(x - 3\pi).$$

7. Résoudre sur \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\cos(x) = \pi; \quad \cos(x) = \sin(x); \quad \cos(x) = \sin(x - \pi/2); \quad \cos(x) = -\frac{1}{2}; \quad \sin(x) = \sqrt{3}/2;$$

$$\left(\cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin(x) = \sqrt{3}/2 \right); \quad \left(\cos(x) = -\frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) = \sqrt{3}/2 \right).$$