Université Henri Poincaré **Faculté des Sciences et Technologies**
Licences Mathématiques, SPI et Informatique *Automne 2012*

Liste d'exercices n°1 : Les Nombres Complexes

Écriture algébrique et exponentielle d'un nombre complexe

1. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
$$z_1 = (3+2i)(1-i) - (2+i)^2 + (3+i)^3, \quad z_2 = \frac{1}{i}, \quad z_3 = \frac{3+5i}{4-i},$$
$$z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{1-7i}{4+3i}, \quad z_5 = \frac{1-5i}{2+i} + \frac{1+5i}{2-i}$$
$$z_6 = (1-i)^2, \quad z_7 = (1-i)^3, \quad z_8 = (1-i)^4.$$

2. Calculer
$$\left|\frac{2+5i}{3+4i}\right|, \quad \left|(3-2i)^4\right|, \quad |\cos t + i\sin t| \quad (t \in \mathbb{R}).$$

3. Représenter géométriquement les nombres complexes suivants et donner leur forme algébrique
$$e^{\frac{i\pi}{3}}, \quad e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad e^{\frac{i\pi}{2}}, \quad e^{\frac{i2\pi}{3}}, \quad e^{i\pi}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad 2e^{\frac{i5\pi}{6}}, \quad 3e^{-\frac{i3\pi}{4}}, \quad 2e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

4. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants
$$z_1 = -3, \quad z_2 = -2i, \quad z_3 = 1+i, \quad z_4 = 1-i, \quad z_5 = 1+i\sqrt{3}, \quad z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}.$$

5. Établir que pour tout n entier non nul, le nombre $(1+i)^n + (1-i)^n$ est réel et $(1+i)^n - (1-i)^n$ est imaginaire pur.

6. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
$$z_1 = (1+i)^{21}, \quad z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

7. Déterminer les nombres entiers n tels que $(\sqrt{3}-i)^n$ soit réel.

8. Calculer de deux façons différentes le nombre complexe $Z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ et en déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

9. Soient θ et θ' deux nombres réels. Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $Z = e^{i\theta} + e^{i\theta'}$.

10. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :
$$z_1 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} - 1.$$

11. Soit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in]0, \pi[$. Déterminer le module et un argument de $1 + z$ et $1 + z + z^2$.

12. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes
    (a) $(1 + i)z + 1 - i = 0$.
    (b) $(1 - i)\overline{z} + 1 + i = 0$.
    (c) $a\overline{z} = z$, suivant les valeurs du paramètre complexe a.

13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$.

Équations du second degré

14. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 = 4, \quad z^2 = -9, \quad z^2 = -8 + 6i, \quad z^2 = 5 - 12i, \quad (1 + i)z^2 + 1 - i = 0.$$

15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 - z + 7 = 0, \quad z^2 - z - 7 = 0, \quad z^2 + 2\sqrt{2}i\, z - 2(1 + i) = 0,$$

$$z^2 - (5 - 14i)z - 24 - 10i = 0, \quad iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0.$$

16. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$.

17. Soit a un nombre complexe donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2(1 - i)z + a^2 - 2i = 0 \ .$$

    Pour quelles valeurs de a cette équation possède-t-elle au moins une racine réelle ?

18. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^2 - 2\overline{z} + 2 - i = 0.$$

19. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$4z^2 + 8|z| - 3 = 0.$$

20. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$iz^3 - (1 + i)z^2 + (1 - 2i)z + 6 + 8i = 0$$

    sachant qu'elle possède une solution réelle.

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

21. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et représenter les solutions :
    (a) $z^3 = 1$.
    (b) $z^3 = -1$.
    (c) $z^4 = -i$.
    (d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$.

(e) $z^6 + 1 = 0$.

(f) $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$.

22. Calculer $1 + j + j^2$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2010} j^k$.

23. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^8 - 15z^4 - 16 = 0.$$

24. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$\left(\frac{z}{z-1}\right)^n = 1.$$

Applications des nombres complexes à la trigonométrie

25. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Écrire $e^{i3\theta}$ en fonction de $e^{i\theta}$. En déduire l'expression de $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et celle de $\sin 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$. Calculer de même $\sin 5\theta$ en fonction de $\sin\theta$.

26. Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^4 x$, $\cos^4 x \sin^3 x$.

27. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, non multiple de 2π, mettre sous forme algébrique le nombre complexe
$$1 + e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + e^{i4\theta} + e^{i5\theta}.$$

En déduire le calcul de
$$S_5 := 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta \ ,$$

et de
$$\Sigma_5 := \sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta \ .$$