Université Henri Poincaré **Faculté des Sciences et Technologies**

Licences Mathématiques, SPI et Informatique *Automne 2012*

Liste d'exercices n°2 : Polynômes

Généralités

Exercice 1 *Soit* $P \in \mathbb{C}[X])$ *de degré* n*. déterminer le degré du polynôme* $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

Exercice 2 *Déterminer les polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *vérifiant :* $3P(X) = XP(X)$.

Exercice 3 *Déterminer les polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *vérifiant :* $4P(X) = XP'(X)$.

Exercice 4 *Déterminer les polynômes de* $\mathbb{R}[X]$ *vérifiant :* $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 5 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, soit* P_n *le polynôme défini par*

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}[(1+iX)^n - (1-iX)^n].$$

1. *Montrer que* P_n *est à coefficients réels.*
2. *Quel est le degré de* P_n *?*

Division euclidienne

Exercice 6 *Effectuer la division euclidienne de* $X^3 - 2X + 1$ *par* $X + i$ *puis de* $X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ *par* $X^2 - 1$.

Exercice 7 *Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme* $X^n + X + 1$ *par le polynôme* $(X-1)^2$.

Exercice 8 *Soit* $n \geq 2$*. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme* $\prod_{k=1}^{n} \left(X \sin \frac{k\pi}{n} + \cos \frac{k\pi}{n} \right)$ *par le polynôme* $X^2 + 1$.

Formule de Taylor

Exercice 9 *Déterminer un polynôme de degré 3 vérifiant*

$$P(1) = P'(1) = 1, \quad P''(1) = P'''(1) = 12. \quad (*)$$

En déduire l'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à 3 vérifiant les relations (*).

Racines

Exercice 10 *On Considère le polynôme*

$$P(X) = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26.$$

1. *Vérifier que* -1 *et* 2 *sont racines de* P *et déterminer l'ordre de multiplicité de chacune.*
2. *Factoriser le polynôme* P *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 11 *Vérifier que* $1+i$ *est une racine du polynôme* $P(X) = X^3 - (4+i)X^2 + (6+2i)X - (4+2i)$ *puis résoudre sur* $\mathbb{C}$ *l'équation* $P(z) = 0$.

Exercice 12 *Soient* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. *On considère les 2 polynômes à coefficients complexes*

$$P(X) = X^5 + aX^2 + bX + 1,$$

$$Q(X) = X^5 + cX^2 + dX + 1.$$

On suppose que P *et* Q *ont une racine commune* $z_0 \in \mathbb{C}$ *de multiplicité 2. On veut montrer que* $P = Q$ *en raisonnant par l'absurde.*
On suppose que $P - Q$ *n'est pas le polynôme nul.*

1. *Que peut-on dire du degré de* $P - Q$ *?*
2. *Montrer que 0 est racine de* $P - Q$.
3. *Montrer que* z_0 *est racine de* $P - Q$ *de multiplicité au moins 2.*
4. *Trouver une contradiction et conclure.*

Factorisation

Exercice 13 *Décomposer les polynômes suivants en produits de facteurs irréductibles sur* $\mathbb{R}[X]$ *:*

$$X^4 + X^2 + 1, \quad X^4 + 1, \quad X^6 + 1, \quad X^8 + X^4 + 1.$$

Exercice 14 *On considère les polynômes*

$$P(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 10,$$

$$Q(X) = X^3 - X^2 - 2X - 4 - 2i.$$

1. *Effectuer la division euclidienne de P par Q.*
2. *Sachant que P et Q ont une racine commune, factoriser le polynôme P sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 15 *Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6$.*

Exercice 16 *Soit P le polynôme $P(X) = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.*

1. *Montrer que j est une racine de $Q(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ et déterminer l'ordre de multiplicité.*
2. *Décomposer Q en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.*
3. *En utilisant $j^4 = j$, en déduire la décomposition de P sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 17 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = (X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}$.*

1. *Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.*
2. *En déduire pour $(n, a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$, la valeur de*

$$\prod_{k=1}^{n} \left(a^2 + \operatorname{cotan}^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right).$$