

TD n°3 : Fractions rationnelles

Exercice 1 Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{5X - 12}{X(X - 4)}, \quad \frac{37 - 11X}{(X + 1)(X - 2)(X - 3)}, \quad \frac{6X - 11}{(X - 1)^2},$$

$$\frac{-19X^2 + 50X - 25}{X^2(3X - 5)}, \quad \frac{2X^2 - 15X + 33}{(X + 1)(X - 4)}.$$

Exercice 2 Décomposer sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3X^5 + 2X^4 + X^2 + 3X + 2}{X^4 + 1}, \quad \frac{X + 5}{9X^2 + 6X + 17},$$

$$\frac{3X^5 - 4X^4 + 4X^3 - 10X^2 - 8}{(X^2 - 2X + 1)(X^2 + X + 1)}, \quad \frac{2X^4 + X^3 + 3X^2 - 6X + 1}{2X^3 - X^2}.$$

Exercice 3 Décomposer sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{3}{X^3 + 1}, \quad \frac{X}{X^4 + 1}, \quad \frac{X^2 - 3}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}.$$

Exercice 4 Décomposer sur \mathbb{C} la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{1}{(X^3 - 1)^2} \text{ en remarquant que } F(jX) = F(X).$$

Correction 1

$$F(X) = -\frac{2}{9} \left(\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{X - j} + \frac{1}{X - j^2} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{j^2}{(X - j)^2} + \frac{j}{(X - j^2)^2} \right).$$

Exercice 5 1. Décomposer $\frac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

2. Décomposer $\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 3X + 2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

3. Décomposer $\frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

4. Décomposer $\frac{X^4 + 2X^2 + 1}{X^2 - 1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

5. Décomposer $\frac{X}{X^2 - 4}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

6. Décomposer $\frac{X^5 + X^4 + 1}{X^3 - X}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

7. Décomposer $\frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X - 1)^4}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

8. Décomposer $\frac{X^5 + X^4 + 1}{(X - 1)^3(X + 1)^2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

9. Décomposer $\frac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$ en éléments simples sur \mathbb{R} .

10. Décomposer $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2}$ en éléments simples sur \mathbb{C} .
11. Décomposer $\frac{X+i}{X^2+i}$ en éléments simples sur \mathbb{C} .
12. Décomposer $\frac{X}{(X+i)^2}$ en éléments simples sur \mathbb{C} .
13. Décomposer $\frac{X^2+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
14. Décomposer $\frac{X}{X^4+1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
15. Décomposer $\frac{X^2+X+1}{X^4+1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
16. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^4-1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
17. Décomposer $\frac{X^5+X+1}{X^6-1}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
18. Décomposer $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
19. Décomposer $\frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .
20. Décomposer $\frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)}$ en éléments simples sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} .

Correction 2 1. $\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1} = X^2 - 2X - 1 - \frac{5}{X-1}$.

2. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-3X+2} = 2X + 7 - \frac{3}{X-1} + \frac{19}{X-2}$.
3. $\frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1} = 2X + 5 + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{7}{X-1}$.
4. $\frac{X^4+2X^2+1}{X^2-1} = X^2 + 3 + \frac{2}{X-1} - \frac{2}{X+1}$.
5. $\frac{X}{X^2-4} = \frac{1/2}{X+2} + \frac{1/2}{X-2}$.
6. $\frac{X^5+X^4+1}{X^3-X} = X^2 + X + 1 - \frac{1}{X} + \frac{1/2}{X+1} + \frac{3/2}{X-1}$.
7. $\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4} = 1 + \frac{1}{X} + \frac{3}{(X-1)^4} + \frac{6}{(X-1)^3} + \frac{10}{(X-1)^2} + \frac{4}{X-1}$.
8. $\frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2} = 1 + \frac{3/4}{(X-1)^3} + \frac{3/2}{(X-1)^2} + \frac{37/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^2} - \frac{5/16}{X+1}$.
9. $\frac{X^7+3}{(X^2+X+2)^3} = X - 3 + \frac{7X+13}{(X^2+X+2)^3} - \frac{7X+21}{(X^2+X+2)^2} + \frac{14}{X^2+X+2}$.
10. $\frac{(3-2i)X-5+3i}{X^2+iX+2} = \frac{2+i}{X-i} + \frac{1-3i}{X+2i}$.
11. $\frac{X+i}{X^2+i} = \frac{-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{4} \frac{1}{X-\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}i}{4}} + \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{2}i}{4} \frac{1}{X-\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{4}}$.
12. $\frac{X}{(X+i)^2} = \frac{1}{X+i} - \frac{i}{(X+i)^2}$.
13. $\frac{X^2+1}{X^4+1} = \frac{1/2}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{1/2}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}i}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{4}} + \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}i}{4}}$.
14. $\frac{X}{X^4+1} = -\frac{\sqrt{2}/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{\sqrt{2}/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}i}{4}} + \frac{\frac{1}{4}i}{X-\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{4}} + \frac{-\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{4}} + \frac{\frac{1}{4}i}{X+\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}i}{4}}$.
15. $\frac{X^2+X+1}{X^4+1} = \frac{(2-\sqrt{2})/4}{X^2+\sqrt{2}X+1} + \frac{(2+\sqrt{2})/4}{X^2-\sqrt{2}X+1} = \frac{-\frac{1+\sqrt{2}i}{4}}{X-\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}i}{4}} + \frac{\frac{1+\sqrt{2}i}{4}}{X-\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{4}} + \frac{-\frac{1-\sqrt{2}i}{4}}{X+\frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i}{4}} + \frac{\frac{1-\sqrt{2}i}{4}}{X+\frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{2}i}{4}}$.
16. $\frac{X^5+X+1}{X^4-1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} - \frac{X+1/2}{X^2+1} = X + \frac{3/4}{X-1} + \frac{1/4}{X+1} + \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}i}{X-i} + \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i}{X+i}$.
17. $\frac{X^5+X+1}{X^6-1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} + \frac{\frac{1}{3}X-\frac{2}{3}}{X^2-X+1} = \frac{1/2}{X-1} + \frac{1/6}{X+1} - \frac{\frac{1}{3}j}{X+j} - \frac{\frac{1}{3}j^2}{X+j^2}$.
18. $\frac{X^3-2}{X^4(X^2+X+1)^2} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2} + \frac{3X+5}{X^2+X+1} = -\frac{2}{X^4} + \frac{4}{X^3} - \frac{2}{X^2} - \frac{3}{X} + \frac{\frac{1}{3}j^2}{(X-j)^2} + \frac{\frac{1}{3}j}{(X-j^2)^2} + \frac{\frac{3}{2}-\frac{23\sqrt{3}i}{18}}{X-j} + \frac{\frac{3}{2}+\frac{23\sqrt{3}i}{18}}{X-j^2}$.

$$19. \frac{X}{(X^2+1)(X^2+4)} = \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+1} - \frac{\frac{1}{3}X}{X^2+4} = \frac{1/6}{X-i} + \frac{1/6}{X+i} - \frac{1/6}{X-2i} - \frac{1/6}{X+2i}.$$

$$20. \frac{X^2-3}{(X^2+1)(X^2+4)} = -\frac{4/3}{X^2+1} + \frac{7/3}{X^2+4} = \frac{\frac{2}{3}i}{X-i} + \frac{-\frac{2}{3}i}{X+i} + \frac{-\frac{7}{12}i}{X-2i} + \frac{\frac{7}{12}i}{X+2i}.$$

Exercice 6 Décomposer sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{X^3}{X^3-1}, \quad \frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2}, \quad \frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)}, \quad \frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2}.$$

Correction 3

$$\frac{X^3}{X^3-1} = 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{X+2}{X^2+X+1}.$$

$$\frac{X^2+X+1}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{3/4}{(X-1)^2} + \frac{1/4}{(X+1)^2}.$$

$$\frac{X^7+1}{(X^2+1)(X^2+X+1)} = X^3 - X^2 - X + 2 - \frac{X+1}{X^2+1} + \frac{X}{X^2+X+1}.$$

$$\frac{X^3+X}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X-1}{X^2+X+1} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^2}.$$