Université Henri Poincaré **Faculté des Sciences et Technologies**

Licences Mathématiques, SPI et Informatique *Automne 2012*

Liste d'exercices n°4 : Systèmes linéaires

Les lettres x, y, z, t désignent des réels à part dans les exercices 1 et 8 où ce sont des complexes.

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} x - iy = 1 \\ ix - y = 1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} ix - iy = 1 + i \\ ix + y = 1 - i \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} (1+i)x + (1-i)y = i \\ (1-i)x + (1+i)y = 1 - i \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} (1+i)x + iy = 0 \\ 2x + (1+i)y = 0 \end{array}\right. \quad : \quad \left\{\begin{array}{r} x - iy = 1 \\ ix + y = i \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} (1+i)x + iy = -1 + i \\ (1-3i)x + (2-i)y = 3 + 2i \end{array}\right.$$

2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} -x + y + z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x - y + z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} x + y - z + 2t = 1 \\ -x + y + 2z + 3t = 2 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x - y + z + 2t = 2 \\ 2x + 3y + 7z + 4t = -1 \end{array}\right.$$

3. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{array}\right.$$

4. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x + y - 4z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + 5y - 5z = 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 2 \\ x - 2y + 5z = 1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 3x - y - z = 2 \\ x + y - 5z = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x + y - 4z = 2 \\ -x + y + z = 1 \\ x + 5y - 5z = -1 \end{array}\right.$$

5. Résoudre :

$$\left\{\begin{array}{r} x - y + 2z - 3t = 1 \\ 2x + y - 2z - t = 2 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} 2x + y + z - t = 0 \\ x - 2y - z + 2t = 1 \\ x + y + z - t = 0 \end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + t = 1 \\ x - y + 3z + t = 1 \end{array}\right.$$

6. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{\begin{array}{r}2x+y+z-t=0\\x-4y-z+2t=0\\x+14y+5z-8t=0\end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r}x+y-z-t=1\\x-2y+3z+4t=1\\5x-y+3z+5t=5\end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r}6x-11y+2z-9t=2\\2x+y-2z-t=1\\x-3y+z-2t=-1\end{array}\right.$$

7. Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres réels α, β et γ. Autrement dit, trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur α, β et γ pour que les systèmes admettent des solutions, et, lorsque ces conditions sont vérifiées, trouver toutes les solutions en fonction des paramètres.

$$\left\{\begin{array}{r}-x-4y-2z=\alpha\\x-3y-z=\beta\\2x+4y+z=\gamma\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r}-x+y+z=\alpha\\y+3z=\beta\\x+z=\gamma\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r}x-y+2z=\alpha\\3x-2y+3z=\beta\\-x+y-z=\gamma\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{r}x-y+z=\alpha\\x+2y-z=\beta\\4x-y+2z=\gamma\end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r}x-y+2z=\alpha\\3x-y-z=\beta\\x+y-5z=\gamma\end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r}2x+y-4z=\alpha\\-x+y+z=\beta\\x+5y-5z=\gamma\end{array}\right.$$

8. On rappelle que $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et que $1+j+j^2=0$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les paramètres $a,b\in\mathbb{C}$ pour que le système suivant d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{C}^3$ admette des solutions, puis le résoudre.

$$\left\{\begin{array}{r}x-y-z=0\\x+jy+j^2z=a\\j^2y+jz=b\end{array}\right. .$$

9. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur les paramètres réels α et β, pour que les systèmes suivants admettent des solutions, puis les résoudre en fonction des paramètres.

$$\left\{\begin{array}{r}x+3y+6z=\alpha\\3x+y+3z=1\\6x+6y+z=1\\7x+9y+7z=\beta\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r}3x-y-2z=\alpha\\-x+3y-z=\beta\\-2x-2y+3z=0\\x-3y+z=1\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r}2x+y+2z=\alpha\\x+2y+z=\beta\\x+y+z=1\\4x+3y+4z=0\end{array}\right.$$

10. Résoudre les systèmes suivants en fonction des paramètres réels a et b (attention, cette fois le rang aussi dépend des paramètres).

$$\left\{\begin{array}{r}ax+y=1\\bx+y=2\end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r}ay+az=ab\\bz=a\\x+y+z=1\end{array}\right. \quad ; \quad \left\{\begin{array}{r}x+y+z=1\\y=1\\bx-z=b-a\end{array}\right.$$

11. Soit $P\in\mathbb{R}_2[X]$ un polynôme. Est-il possible d'écrire P comme combinaison linéaire des polynômes $1,(1+X)^2$ et $(1-X)^2$? L'écriture est-elle unique ?