Université Henri Poincaré **Faculté des Sciences et Technologies**

Licences Mathématiques, SPI et Informatique *Automne 2012*

Liste d'exercices n°5 - Matrices

Produit de matrices, inversibilité

1. Soient les 4 matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quels sont les produits qui ont un sens ? Effectuer ces produits.

2. Quelles sont les matrices $(2,2)$ A telles que $AM = MA$ dans les cas suivants ?

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Soient les 3 matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   a) Dire lesquelles sont inversibles et calculer leur inverse lorsqu'ie existe.
   b) Trouver une matrice M telle que $AM = B$.
   c) Trouver une matrice N telle que $NC = B$.
   d) Dans les deux cas, y a-t-il unicité ?
   e) Peut-on trouver une matrice P telle que $BP = C$?

4. À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, dire si les matrices suivantes sont inversibles et si oui, les inverser, puis vérifier le calcul en multipliant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Puissances de matrices

5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.
   (a) Calculer A^2 puis A^3.
   (b) Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (c) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls et les autres valent 1. Écrire B en fonction de A.
   (d) Calculer B^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
6. Soit A la matrice carrée d'ordre 2 donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
   (a) Calculer A^2 directement.
   (b) Déterminer les réels a et b tels que
$$A^2 + a\,A + b\,I_2$$
   soit la matrice nulle.
   (c) Déterminer le polynôme caractéristique Q_A de A et ses racines.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $P(X) = X^n$ par $Q_A(X)$ (sans effectuer la division).
   (e) En utilisant les questions précédentes, déterminer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, la matrice A^n.
7. (a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le plus petit entier $n \geq 1$ tel que A^n soit un multiple de I_2 en calculant A^n.
   (b) Soient $\theta \in \mathbb{R}$. On considere la matrice $B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
      i. Calculer B_θ^2.
      ii. Conjecturer puis montrer (par exemple par récurrence) une formule simple pour B_θ^n, $n \geq 1$.
      iii. Quel est le rapport avec la question (a) ?
      iv. Montrer que B_θ est inversible et calculer son inverse.

Applications aux suites recurrentes

8. On considere la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2}$ si $n \geq 1$. Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9. Donner des conditions nécessaires et suffisantes sur $t \in \mathbb{R}$ pour que toute suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = u_n + tu_{n-1}$ ait 0 pour limite.

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui vérifie $u_{n+1} + 2u_n + u_{n-1} = 0$. À quelle condition sur u_0 et u_1 cette suite est-elle bornée ? Existe-t-il des couples (u_0, u_1) pour lesquels cette suite admet une limite ?

Autres

11. **Matrices diagonales**. On dit qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est *diagonale* si $m_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
   (a) Soient A et B deux matrices diagonales, et $C = AB$. Montrer que C est diagonale et en calculer les coefficients.
   (b) Montrer qu'une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses termes diagonaux sont tous non nuls. Montrer que dans ce cas, son inverse est également une matrice diagonale.

12. **Matrice transposée**. Soit $A = (A_{ij}) \in M_{k,l}(\mathbb{R})$ une matrice. La matrice $B = (B_{ij}) \in M_{l,k}(\mathbb{R})$ définie en posant $B_{ij} := A_{ji}$ pour tout $i = 1, ..., k$ et tout $j = 1, ..., l$ est appelée *transposée* de A, est sera notée ${}^tA$.
   (a) Montrer que ${}^t({}^tA) = A$ pour tout A.
   (b) Si $A \in M_{k,l}$ et $B \in M_{l,m}(K)$, montrer que ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.
   (c) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible, montrer que sa transposée est inversible.

13. **Noyau d'une matrice**. Soit $M \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. On définit $\mathrm{Ker}(M) = \{X \in \mathbb{R}^m \mid MX = 0\}$. Cet ensemble s'appelle le *noyau* de M, il sera étudié en détail au second semestre.
   (a) Montrer que $0 \in \mathrm{Ker}(M)$ et que si $X, Y \in \mathrm{Ker}(M)$, alors $X + Y \in \mathrm{Ker}(M)$.
   (b) Calculer le noyau des deux matrices suivantes
   $$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$
   (c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $\mathrm{Ker}(M)$ contient un vecteur non nul, alors A n'est pas inversible.
   (d) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(AB)$.

14. **Matrices nilpotentes**. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}$, tel que $A^k = 0$.
   (a) Montrer qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.

(b) Dire si les matrices suivantes sont nilpotentes :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Trouver un exemple de deux matrices nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente.

15. **Matrices d'ordre fini**. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que A est *d'ordre fini* s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = I_n$. Le plus petit tel entier k est appelé *ordre* de la matrice.

    (a) Montrer si A est d'ordre fini, alors A est inversible, et donner son inverse.

    (b) Trouver toutes les matrices diagonales $A \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = I_2$. Même question dans $M_2(\mathbb{C})$

    (c) Trouver toutes les matrices diagonales $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = I_2$, mais $M^2 \neq I_2$. Même question dans $M_2(\mathbb{C})$.

    (d) Montrer que
    $$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
    est d'ordre 3. Généraliser : si $n \in \mathbb{N}^*$, donner une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ d'ordre n.

    (e) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ d'ordre fini. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = \lambda X$. Montrer que λ est une racine de l'unité.