Quelques résultats généraux sur les matrices, dans le cours ou pas.
Version préliminaire

La lettre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les résultats suivants sont faciles à démontrer et sont utiles dans une grande variété d'exercices ou de problèmes. Plusieurs d'entre eux figurent dans le cours, avec la démonstration ou pas. Ils portent sur le produit matriciel, l'inversibilité, les matrices élémentaires, les opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, et d'autres notions de base.

1. (Évident et très utile) Soient A et B des matrices telles que le produit AB ait un sens. Montrer que si la i-ème ligne de A est nulle, celle de AB l'est également. Montrer que si la j-ème colonne de B est nulle, celle de AB l'est également.
2. (Matrices élémentaires) Soit $i, j \in [1, n]$. On note E_{ij} la matrice de taille n dont tous les coefficients sont nuls, à part celui en position (i, j). Lorsque $n = 2$ écrire les matrices E_{11}, E_{12}, E_{21} et E_{22}. Écrire une matrice quelconque de taille 2 en fonction de ces quatre matrices. Ecrire le terme général de E_{ij} et calculer $E_{ij}E_{kl}$ et $E_{ij}e_k$ à l'aide des symboles de Kronecker. Si $M = (m_{ij}) \in M_n(K)$, calculer $M.E_{ij}$ et $E_{ij}.M$ en fonction de M.
3. Trouver des exemples de matrices A et B dans $M_n(K)$ (avec $n = 2$ ou 3, par exemple) telles que :
   (a) A et B soient inversibles mais pas $A + B$;
   (b) $A + B$ soit inversible mais pas A, ou pas B, ou aucune des deux.
4. On note e_k le vecteur (ou matrice-colonne) dont le seul coefficient non nul est le k-ème, et vaut 1. Autrement dit, $\forall i \in [1, n]$, $(e_k)_i = \delta_{ik}$. On l'appelle le k-ème vecteur de la base canonique de K^n. Soit $A \in M_n(K)$. Que vaut le vecteur $A.e_k$?
5. (Trace) Soit $A \in M_n(K)$. On appelle trace de A et on note $Tr(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, autrement dit le scalaire $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Calculer $Tr(E_{ij}.A)$ et $Tr(A.E_{ij})$. Montrer que $Tr(AB) = Tr(BA)$ et que que $Tr(A) = Tr({}^tA$ pour toutes matrices A et B.
6. (Matrices triangulaires) On dit qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est triangulaire supérieure et on note $M \in T^+(n)$ si $i > j \Rightarrow m_{ij} = 0$. Soient A et B dans $T^+(n)$, et $C = AB$. Montrer que $C \in T^+(n)$. Montrer de plus que $\forall i \in [1, n]$, $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$. Remarque pour plus tard : on peut également démontrer (en utilisant par exemple la théorie de la dimension, voir second semestre) qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible ssi ses termes diagonaux sont non nuls, et que dans ce cas, son inverse est également une matrice triangulaire supérieure.
7. (Matrices de transvection) Soit $v \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq i, j \leq n$, et $\lambda \in K$. On note $T_a(i, j) = \mathrm{Id_n} + aE_{ij}$.
   (a) A quelle condition sur λ, i et j la matrice $T_\lambda(i, j)$ est-elle inversible ?
   (b) Dans ce cas, quel est son inverse ?
   (c) Soit $A \in M_n(K)$, $B = A.T_\lambda(i, j)$, et $C = T_\lambda(i, j).A$. Les matrices B et C se déduisent de A par des opérations sur les lignes ou les colonnes de A. Précisez ces opérations, dans chaque cas.
8. (Un détail sur la transposée) Si $A \in M_n(K)$, que vaut la matrice-ligne $({}^te_k).A$?
9. (Noyau et injectivité) Soit $A \in M_n(K)$, et soit $f : K^n \to K^n$, $X \mapsto AX$ l'application associée à A. Montrer que f est injective ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.