# Exercices (classiques) de révisions sur les matrices
# Version préliminaire

La lettre $K$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$. Un vecteur de taille $n$ est un élément de $K^n$, que l'on peut voir comme une matrice-colonne $n \times 1$. On peut donc multiplier une matrice $n \times m$ par un vecteur de taille $m$. Sans précisions supplémentaires, $n$ désigne un entier positif. On note 0 le vecteur ou la matrice nulle, la taille dépendant du contexte. On note $I$ la matrice identité. Si $1 \leq i, j \leq n$, on note $\delta_{ij}$ l'entier qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Les $\delta_{ij}$ sont appelés les symboles de Kronecker.

### Exercices de base, inversibilité

1. (Pour s'entraîner) Écrire les matrices de taille $3\times 3$ dont le terme général est donné par les formules suivantes :
$$a_{ij} = 2i + j; \quad b_{ij} = i^j; \quad c_{ij} = 2^{i-j}; \quad d_{ij} = i + j + \delta_{ij}.$$
2. Trouver des exemples de matrices $A$ et $B$ dans $M_n(K)$ (avec $n = 2$ ou 3, par exemple) telles que :
   (a) $A$ et $B$ soient inversibles mais pas $A + B$ ;
   (b) $A + B$ soit inversible mais pas $A$, ou pas $B$, ou aucune des deux.
3. Soient $A$, $B$ et $C$ des matrices dans $M_n(K)$ telles que $ABC = 0$. Rappeler pourquoi au moins une d'entre elles n'est pas inversible. Montrer qu'au moins deux d'entre elles ne sont pas inversibles.
4. Soient $A, B \in M_n(K)$ telles que $AB = A+B$. Calculer $(I - A)(I - B)$. En déduire que $AB = BA$.
5. Déterminer les paramètres $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que les matrices suivantes soient inversibles :
$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 & \lambda + 1 \\ \lambda - 1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 3 & 5 - \lambda \end{pmatrix} \quad ; \quad C(\lambda) = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 3 + \lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$
6. Soient $A, B \in M_2(K)$. Montrer que $(AB - BA)^2$ est un multiple de $I_2$.
7. (Matrices à diagonale strictement dominante) On dit qu'une matrice $A \in M_n(K)$ est à diagonale strictement dominante si :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,j}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|.$$
   Montrer qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible [1].

### Matrices classiques

8. On dit qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est triangulaire supérieure stricte et on note $M \in T^+(n)$ si $i \geq j \Rightarrow m_{ij} = 0$. Montrer qu'une matrice triangulaire stricte n'est pas inversible (utiliser un exercice précédent ou bien calculer $M.e_1$). Montrer que le produit de $n$ matrices triangulaires supérieures strictes (de taille $n$) est nul.
9. (Projecteurs) Soit $A \in M_n(K)$. On dit que $A$ est un projecteur si $A^2 = A$. Montrer qu'un projecteur est inversible ssi c'est l'identité. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P$ est un projecteur, $I - P$ aussi. Si $P$ et $Q$ sont des projecteurs, montrer que $P + Q$ l'est également ssi $PQ = QP = 0$. Donner un exemple de projecteurs $P$ et $Q$ tels que $P+Q$ ne soit pas un projecteur. Soit $S = I - 2P$. Est-ce un projecteur ? Calculer $S^2$ et en déduire si $S$ est inversible ou pas.

1. Cet exercice sert à démontrer une multitude de résultats, par exemple le théorème des disques de Gerschgorin (deuxième année).

10. (Matrices symétriques) Soit $A \in M_n(K)$. On dit que $A$ est symétrique (resp. antisymétrique) si $A = {}^tA$ (resp. si ${}^tA = -A$). On note $Sym_n(K)$ et $ASym_n(K)$ les ensembles de matrices symétriques et antisymétriques.
    (a) Montrer que la somme de deux matrices symétriques est symétrique, et que la somme de deux antisymétriques est antisymétrique.
    (b) Si $A \in M_n(K)$, montrer que $A + {}^tA$ est symétrique, et en déduire que toute matrice carrée est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
    (c) Que vaut la trace d'une matrice antisymétrique ?
    (d) Montrer que le produit de deux matrices $A$ et $B$ symétriques (resp. antisym.) est symétrique (resp. antisym.) ssi $AB = BA$ (resp. $AB = -BA$).
    (e) Soit $A$ une matrice symétrique (resp. antisymétrique) inversible. Montrer que son inverse est symétrique (resp. antisymétrique).
    (f) Montrer qu'une matrice $3 \times 3$ antisymétrique n'est jamais inversible.
11. (Déterminant en dimension 3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On définit le déterminant de $A$ par la formule :
$$\det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg.$$
Calculer le déterminant des matrices de l'exercice 4 de la première feuille. Montrer les assertions suivantes :
    (a) Si $\lambda \in K$, alors $det(\lambda A) = \lambda^3 det(A)$.
    (b) Si deux colonnes de $A$ sont proportionnelles, alors $det(A) = 0$.
    (c) Si on échange deux colonnes de $A$, le déterminant est multiplié par $-1$.
    (d) Si on ajoute à une colonne un multiple d'une autre, le déterminant ne change pas.
    (e) Si une colonne est combinaison linéaire des deux autres, alors $det(A) = 0$.
12. (Matrices de permutation) Soit $A \in M_n(K)$. On dit que $A$ est une matrice de permutation si dans chaque ligne et chaque colonne de $A$, tous les coefficients sont nuls sauf un, qui vaut 1. Montrer qu'il y a deux matrices de permutation si $n = 2$, et six si $n = 3$. Montrer que le produit de deux matrices de permutation est une matrice de permutation. Montrer qu'une matrice de permutation est inversible, et que son inverse est également une matrice de permutation (c'est en fait sa transposée).
13. (Matrices nilpotentes : suite)
    (a) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle nilpotente ?
    (b) Montrer qu'une matrice diagonale et nilpotente est nulle [2].
    (c) Montrer [3] qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.
    (d) Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes, noté $Nilp(n)$, est un cône, autrement dit montrer que si $A$ est nilpotente et $\lambda \in K$, alors $\lambda A$ est nilpotente.

2. Indication : si le $k$-ème terme diagonal est non nul, que vaut $A.e_k$ ? Et $A^n.e_k$ ?
3. en utilisant un des exercices de la première feuille

(e) Soit $A \in M_2(K)$ nilpotente. En utilisant le polynôme caractéristique, montrer que $A^2 = 0$.

(f) Trouver un exemple de deux matrices nilpotentes (de taille 2) dont la somme n'est pas nilpotente.

14. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, d'ordre fini et à coefficients entiers. Le but de l'exercice est de montrer que $A^6 = I$. Montrer que $det(A) = \pm 1$. En calculant les puissances de $A$ grâce au polynôme caractéristique, montrer que les racines de $P$ sont de module 1. Montrer que $-2 \leq Tr(A) \leq 2$ (penser à l'inégalité triangulaire). En déduire qu'il n'y a que dix choix possibles pour $P$, que l'on écrira. Pour chaque possibilité, donner les racines de $P$. En déduire que $A^6 = I$.

15. Soit $A \in M_n(K)$ et $k \in \mathbb{N}^*$ telle que $A^k = I$, et $A^{k-1} \neq I$. Soit $P = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k} A^i$. Montrer que $P$ est un projecteur. Montrer que si $\sum_{i=0}^{k} Tr(A^i) = 0$, alors $\sum_{i=0}^{k} A^i = 0$.

16. (Matrices unipotentes) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On dit que $A$ est unipotente si $A - I$ est nilpotente. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et un vecteur $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $AX = \lambda X$. Montrer que $\lambda$ est une racine de l'unité.

17. (Matrices de permutation) Soit $A \in M_n(K)$. On dit que $A$ est une matrice de permutation si dans chaque ligne et chaque colonne de $A$, tous les coefficients sont nuls sauf un, qui vaut 1. Montrer qu'i y a deux matrices de permutation si $n = 2$, et six si $n = 3$. Montrer que le produit de deux matrices de permutation est une matrice de permutation. Montrer qu'une matrice de permutation est inversible, et que son inverse est également une matrice de permutation. Montrer par récurrence qu'il y a $n!$ matrices de permutation de taille $n$.

### Équations matricielles

18. Trouver toutes les matrices $M \in M_2(\mathbb{C})$ diagonales telles que $M^2 = -I$. Même question avec $M \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie également cette relation. Interprétation géométrique ? En effectuant une division euclidienne, montrer que si $M^2 = -I$ et $M$ est réelle, alors $Tr(M) = 0$ et $det(M) = 1$.

19. Existe-t-il des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et si oui combien ? [4]

20. Existe-t-il des matrices $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$, et si oui, lesquelles ? [5]

21. Soient $A$ et $B$ dans $M_n(K)$. Résoudre l'équation $M + Tr(M).A = B$, d'inconnue $M \in M_n(K)$, en fonction de $A$ et $B$.

22. Soit $A \in M_n(K)$. Résoudre l'équation $M + {}^tM = Tr(M).A$, d'inconnue matricielle $M \in M_n(K)$. Commencer par étudier ce qui se passe si $Tr(M) = 0$.

### Techniques euclidiennes

23. Soit $X \in \mathbb{R}^n$, vu comme matrice-colonne : $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tX.X$ est un réel positif. La norme (euclidienne) de $X$ est par définition $||X|| = \sqrt{{}^tX.X}$. Montrer que $||X|| = 0 \Leftrightarrow X = 0$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $||\lambda X|| = |\lambda|.||X||$. Montrer que pour tout couple de vecteurs $X$ et $Y$, on a $||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$.

24. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A = 0$ ssi $tr({}^tMM) = 0$ Est-ce vrai pour une matrice complexe ?

4. Indication : utiliser l'exercice 13.
5. Indication : pour cet exercice et les suivants on pensera à utiliser la trace.

25. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que $A$ est orthogonale si ${}^tAA = I$. Montrer qu'une matrice orthogonale est inversible et que son inverse est orthogonale. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $||AX|| = ||X||$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifie $AX = \lambda X$, montrer que $\lambda = \pm 1$.

**Équivalence et similitude**

26. Soient $A, B \in M_n(K)$. On dit que $A$ et $B$ sont équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P, Q \in GL_n(K)$ telles que $B = PAQ$. Montrer que si $A$ est équivalente à $B$ et $B$ à $C$, alors $B$ est équivalente à $A$ et $A$ est équivalente à $C$. Montrer que si deux matrices sont équivalentes, l'une est inversible ssi l'autre l'est, et que dans ce cas elles sont équivalentes à $I$. Montrer que deux matrices diagonales sont équivalentes ssi elles ont le même nombre de coefficients diagonaux non nuls. Montrer à l'aide du pivot de Gauss que toute matrice est équivalente à une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un certain nombre sur la diagonale, qui valent 1. En déduire, que si $n = 2$, une matrice est soit nulle, soit inversible, soit équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

27. Soient $A, B \in M_n(K)$. On dit que $A$ et $B$ sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(K)$ telle que $B = PAP^{-1}$. Soient $A$ et $B$ deux matrices semblables. Montrer que $B$ est inversible ssi $A$ l'est également. Montrer que $A$ et $B$ ont même trace et (en dimension 2) même déterminant. Calculer les puissances de $B$ en fonction des puissances de $A$. En déduire que $B$ est nilpotente (resp. unipotente, d'ordre fini, projecteur) ssi $A$ l'est. Si $A \in M_2(K)$ est nilpotente, montrer que $A$ est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (comme $A$ n'est pas inversible, il existe $X$ tel que $AX = 0$. Si $Y$ n'est pas colinéaire à $X$, alors la matrice $P$ dont les colonnes sont $X$ et $Y$ est inversible ; de plus, $A^2Y = 0$ puisque $A^2 = 0$).

28. Montrer qu'une matrice nilpotente et semblable à une matrice diagonale est forcément nulle.

**Autres exercices**

29. Soit $A \in M_n(K)$, et $X \in K^n$. On dit que $A$ fixe $X$, ou bien que $X$ est un vecteur fixe pour $A$, si $AX = X$. Montrer que la somme de deux vecteurs fixes est un vecteur fixe. Montrer que ? n'a pas de vecteurs fixes non nuls. Trouver les vecteurs fixes de ? et de ?

30. Soit $A, B \in M_n(K)$ deux matrices telles que $AB = BA$, et soit $X \in K^n$ un vecteur fixe pour $A$. Montrer que $BX$ est également fixe pour $A$. Contre-exemple si les matrices ne commutent pas ?

31. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients entiers, inversible. Montrer que son inverse est à coefficients entiers ssi $det(A) = \pm 1$. Même exercice pour des matrices de taille 3.

32. Soit $A$ une matrice $3 \times 3$ antisymétrique à coefficients entiers. Montrer que son déterminant est le carré d'un entier (ce résultat se généralise en toute taille).

33. On dit que $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ est centrosymétrique si pour tout $(i, j)$, on a : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}$. Montrer que la somme et le produit de deux matrices centrosymétriques est centrosymétrique.

34. Soit $A \in M_n(K)$ telle que $A_{ij} = 1$ si $j \equiv i + 1[n]$, et $A_{ij} = 0$ sinon. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.