Université Henri Poincaré **Faculté des Sciences et Technologies**

Licences Mathématiques, SPI et Informatique *Automne 2012*

Liste d'exercices n°6 : Fonctions usuelles

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{2x}{x^2+25}.$$
Étudier la fonction f et dresser son tableau de variation. Trouver Im (f). La fonction f est-elle injective ?

2. (a) Montrer que la fonction $f :]-1,0[\longrightarrow]0,1[$ définie par
$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
est bijective. Calculer sa fonction réciproque f^{-1}.

   (b) Même question pour la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par
$$g(x) = \frac{e^x+2}{e^{-x}}.$$

3. Donner *le domaine de définition* des fonctions (de la variable réelle x) suivantes puis calculer leur dérivée lorsqu'elle existe :
$$\frac{x}{1+x^4}, \quad e^{-1/x^2}, \quad \cos(\sqrt{1+x^2}), \quad \sqrt{1+\ln(2x)}.$$

4. Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$, et $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Faire une étude complète de la fonction f. En particulier, on montrera que la courbe $(\mathcal{C})$ admet des droites asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$ et on étudiera la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à ses asymptotes.

5. (a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x - 2$ est bijective. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = f^{-1}(x)$ au point $x = 0$.

   (b) Mêmes questions pour la fonction $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -1 + e^{x-1} + \ln x$.

6. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la dérivée $n$ième de la fonction f définie par
$$f(x) = (x^3 + x^2 + 1)\, e^{-x}.$$

7. Montrer que pour tout nombre réel x,
$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$$

8. Simplifier les expressions suivantes :

$$(a)\ \ x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}} \qquad\qquad (b)\ \ \frac{\mathrm{ch}(\ln x)+\mathrm{sh}(\ln x)}{x}$$

9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^2 x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$.

10. Calculer les valeurs exactes de

$$\mathrm{Arccos}(\cos\frac{2\pi}{3}),\quad \mathrm{Arccos}(\cos\frac{-2\pi}{3}),\quad \mathrm{Arccos}(\cos\frac{4\pi}{3}),\quad \mathrm{Arctan}(\tan\frac{3\pi}{4}).$$

11. Calculer :
    (a) $\mathrm{Arctan}\,\frac{x+y}{1-xy} - \mathrm{Arctan}\,x - \mathrm{Arctan}\,y \quad (\text{pour } x, y \in \mathbb{R},\ xy \neq 1)$.
    (b) $\mathrm{Arctan}\,2 + \mathrm{Arctan}\,5 + \mathrm{Arctan}\,8$.
    (c) $\mathrm{Arccos}\,x + \mathrm{Arcsin}\,x \quad (\text{pour } x \in [-1, 1])$.

12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
    (a) $\mathrm{Arcsin}\,x = \mathrm{Arcsin}\,a + \mathrm{Arcsin}\,b$.
    (b) $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,2x = \frac{\pi}{4}$.
    (c) $\mathrm{Arcsin}\,x + \mathrm{Arcsin}\,\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$.
    (d) $\mathrm{Arcsin}\,\frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

13. Pour $x \in [-1, 1]$, simplifier l'expression

$$\mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}).$$

14. Étudier la fonction suivante :
    (a)

$$f(x) = \mathrm{Arccos}(1-2x^2) + \mathrm{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2}).$$