**Université de Lorraine, Nancy** **Faculté des Sciences et Technologies**
*Licences Mathématiques, SPI et Informatique* *Automne 2012*

# Liste d'exercices n°7 : Calcul de primitives

## 1 Fractions rationnelles

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{5x-12}{x(x-4)}\,dx\ ,\ \int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx\ ,\ \int \frac{6x-11}{(x-1)^2}\,dx,\ \int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx\ ,\ \int \frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx\ ,$$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,dx\ \int \frac{2x^2-15x+33}{(x+1)(x-5)}\,dx,\ ,\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\ ,\ \int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx.$$

## 2 Changement de variable

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{dx}{x^2+16},\ \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,\ \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx,\ \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}},\ \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{16-e^{2x}}}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}\,dx,\ \int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^x}}\,dx,\ \int \frac{dx}{49-4x^2}.$$

## 3 Intégration par parties

Calculer les primitives suivantes :

$$\int x\ln x\ dx,\ \int x^2\ e^{-x}\ dx,\ \int \operatorname{Arctan} x\ dx,\ \int e^{3x}\cos 2x\ dx,$$

$$\int \sin x\ln(\cos x)\ dx,\ \int x^3 e^{-x^2}\ dx,\ \int x^3\operatorname{sh} x\ dx,\ \int x^3\cos x^2\ dx.$$

## 4 Fonctions en sinus et cosinus

Calculer les primitives suivantes :

$$\int \cos x\sin^4 x dx,\qquad \int \cos^6 x dx,\quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}dx,\qquad \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx,\qquad \int \frac{dx}{\cos^4 x+\sin^4 x},$$

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin 2x}dx,\quad \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx,\ \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx,\int \frac{dx}{2+\sin x}.$$

## 5 Calculs d'aires

Calculer l'aire de chacun des domaines définis par les conditions suivantes :

$(a)$ $$y \leq x^2 + 1, \quad y - x \geq 2, \; -2 \leq x \leq 2,$$

$(b)$ $$0 \leq y \leq \sqrt{x}, \quad x + y \leq 6, \quad x \geq 1.$$

## 6 Intégrales classiques

Soit $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+1}$.
2. Calculer $I_n$.

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Établir une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+2}$.
2. En déduire $I_{2p}$ et $I_{2p+1}$.

**Université Henri Poincaré** **Faculté des Sciences et Technologies**

*Licences Mathématiques, SPI et Informatique* *Automne 2010*

# Liste d'exercices n°5 bis : Calcul de primitives

**Exercice 1** *Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes.*

$$1.\ \frac{1}{a^2+x^2}\,,\quad 2.\ \frac{1}{(1+x^2)^2}\,,\quad 3.\ \frac{x^3}{x^2-4}\,,\quad 4.\ \frac{4x}{(x-2)^2}\quad 5.\ \frac{1}{x^2+x+1}.$$

$$6.\ \frac{1}{(t^2+2t-1)^2}\,,\quad 7.\ \frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}\,,\quad 8.\ \frac{3t+1}{t^2-2t+10}\,,\quad 9.\ \frac{1}{t^3+1}\,,\quad 10.\ \frac{x^3+2}{(x+1)^2}.$$

$$11.\ \frac{x+1}{x(x-2)^2}\,,\quad 12.\ \frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}\,,\quad 13.\ \frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}\,,\quad 14.\ \frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2}.$$

$$15.\ \frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)}\,,\quad 16.\ \frac{1}{1-x^2}\,,\quad 17.\ \frac{1}{x^3-7x+6}\,,$$

$$18.\ \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,,\quad 19.\ \frac{4x^2}{x^4-1}.$$

***Correction 1*** *Résultats valables sur chaque intervalle du domaine de définition.*

1. $\frac{1}{x^2+a^2}$ *est un élément simple. Primitives :* $\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+k$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ *est un élément simple. Primitives :* $\frac{1}{2}\arctan x+\frac{x}{2(1+x^2)}+k$.
3. $\frac{x^3}{x^2-4}=x+\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+2}$. *Primitives :* $\frac{x^2}{2}+\ln(x^2-4)^2+k$.
4. $\frac{4x}{(x-2)^2}=\frac{4}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}$. *Primitives :* $4\ln|x-2|-\frac{8}{x-2}+k$.
5. $\frac{1}{x^2+x+1}$ *est un élément simple. Primitives :* $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}+k$.
6. $\frac{1}{(t^2+2t-1)^2}=\frac{1}{8(t+1+\sqrt{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{16(t+1+\sqrt{2})}+\frac{1}{8(t+1-\sqrt{2})^2}+\frac{-\sqrt{2}}{16(t+1-\sqrt{2})}$.
   *Primitives :* $-\frac{t+1}{4(t^2+2t-1)}+\frac{\sqrt{2}}{16}\ln\left|\frac{t+1+\sqrt{2}}{t+1-\sqrt{2}}\right|+k$.
7. $\frac{3t+1}{(t^2-2t+10)^2}$ *est un élément simple.*
   *Primitives :* $-\frac{3}{2(t^2-2t+10)}+\frac{2(t-1)}{9(t^2-2t+10)}+\frac{2}{27}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.
8. $\frac{3t+1}{t^2-2t+10}$ *est un élément simple. Primitives :* $\frac{3}{2}\ln(t^2-2t+10)+\frac{4}{3}\arctan(\frac{t-1}{3})+k$.
9. $\frac{1}{t^3+1}=\frac{1}{3(t+1)}-\frac{t-2}{3(t^2-t+1)}$. *Primitives :* $\frac{1}{3}\ln|t+1|-\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2t-1}{\sqrt{3}})+k$.
10. $\frac{x^3+2}{(x+1)^2}=x-2+\frac{3}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$. *Primitives :* $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+k$.
11. $\frac{x+1}{x(x-2)^2}=\frac{1}{4x}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{3}{2(x-2)^2}$. *Primitives :* $\frac{1}{4}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{3}{2(x-2)}+k$.

*12.* $\frac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2} = \frac{1}{2}(x^3-x^2+3) - \frac{3}{2x}$. *Primitives :* $\frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{2} - \frac{3}{2}\ln|x| + k$.

*13.* $\frac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)} = \frac{1}{4^3(x+1)} + \frac{1-x}{4^3(x^2+3)} + \frac{1-x}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{3(1-x)}{4(x^2+3)^3}$.
*Primitives :* $-\frac{x+3}{4^2(x^2+3)^2} - \frac{2x-3}{3.2^5(x^2+3)} - \frac{1}{2^7}\ln(x^2+3) - \frac{1}{3\sqrt{3}\,2^6}\arctan(\frac{x}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{4^3}\ln|x+1| + k$.

*14.* $\frac{x^7+x^3-4x-1}{x(x^2+1)^2} = x^2 - 2 - \frac{1}{x} + \frac{x+4}{x^2+1} + \frac{x-6}{(x^2+1)^2}$.
*Primitives :* $\frac{x^3}{3} - 2x - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \arctan x - \frac{6x+1}{2(x^2+1)} + k$.

*15.* $\frac{3x^4-9x^3+12x^2-11x+7}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x^2+1}$.
*Primitives :* $-\frac{1/2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3\ln|x-1| - \arctan x + k$.

*16.* $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1|$.

*17.* $\int \frac{1}{x^3-7x+6}\ dx = \int \frac{1}{20(x+3)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{5(x-2)}\ dx = \frac{1}{20}\ln\left|\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5}\right| + C$.

*18.* $\int \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\ dx = \int 2x+3+\frac{2}{x+2}+\frac{3x-1}{x^2-2x+4}\ dx = x^2+3x+\ln(x+2)^2+\frac{3}{2}\ln(x^2-2x+4)+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$.

*19.* $\int \frac{4x^2}{x^4-1}\ dx = \int \frac{2}{x^2+1} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\ dx = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + 2\arctan x + C$

**Exercice 2** *Calculer les primitives des fonctions suivantes.*

$$1.\quad e^{\sin^2 x}\sin 2x\ ,\quad 2.\quad \cos^5 x\ ,\quad (\operatorname{ch} x)^3\ ,\quad \cos^4 x\quad (\operatorname{sh} x)^4.$$

$$3.\quad x^3e^x\ ,\quad 4.\quad \ln x\ ,\quad \arcsin x\ ,\quad 6.\quad \operatorname{ch} x\sin x\ ,\quad 7.\quad \frac{1}{\sin x}.$$

$$8.\quad \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\ ,\quad 9.\quad e^{ax}\cos bx\ ,\quad 10.\quad \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}\ ,\ \textit{pour } 0<x<1.$$

$$11.\quad \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\quad 2.\quad \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}\ \textit{avec } 0<x<a\ ,\quad 12.\quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x}.$$

***Correction 2*** *1. Changement de variable* $u=\sin^2 x$ *(ou d'abord* $u=\sin x$*) ;* $e^{\sin^2 x}+C$.

2. *Deux méthodes : changement de variable* $u=\sin t$ *(ou* $u=\operatorname{sh} t$*), ou linéarisation.*
$\frac{1}{15}(15\sin t - 10\sin^3 t + 3\sin^5 t) + C$ *ou* $\frac{1}{80}\sin 5t + \frac{5}{48}\sin 3t + \frac{5}{8}\sin t + C$ ;
$\operatorname{sh} t + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 t + C$ *ou* $\frac{1}{12}\operatorname{sh} 3t + \frac{3}{4}\operatorname{sh} t + C$ ;
$\frac{1}{32}(\sin 4t + 8\sin 2t + 12t) + C$ ; $\frac{1}{32}(\operatorname{sh} 4t - 8\operatorname{sh} 2t + 12t) + C$.
3. *Intégrations par parties :* $(x^3-3x^2+6x-6)e^x + C$.
4. *Intégration par parties :* $x\ln x - x + C$ ; $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
5. *Intégrations par parties :* $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t\sin t - \operatorname{ch} t\cos t) + C$.
6. *Changement de variable* $t=\tan\frac{x}{2}$ ; $\ln|\tan\frac{x}{2}| + C$ *sur chaque intervalle...*
7. *Changement de variable* $u=e^x$ ; $\frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}(e^x-2) + C$.
8. *Intégrations par parties :* $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx) + C$ ;
$\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx) + C$.
9. *Changement de variable* $t=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ; $2\sqrt{\frac{x}{1-x}} - 2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}} + C$.

10. *Changement de variable* $t = \arcsin x$ ; $\frac{1}{2}(\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}) + C$.

11. *Changement de variable* $x^3 = u^2$ ; $\frac{2}{3} \arcsin \sqrt{\frac{x^3}{a^3}} + C$.

12. *Multiplier et diviser par* $\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$, *ou passer en* $e^x$ ; $\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \frac{\operatorname{ch} 2x}{4} + C$ *ou* $\frac{x}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$.