Université Henri Poincaré **Faculté des Sciences et Technologies**

Licences Mathématiques, SPI et Informatique *Automne 2012*

TD n°8 : Équations différentielles.

1 Équations d'ordre 1.

1. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :
   (a) $y' + y/t = 0$.
   (b) $y' + (\sin t)y = 0$.
   (c) $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$.
   (d) $y' + 2y = \frac{1}{e^{2t}+e^t+1}$.
   (e) $y' - \ln(t)y = e^{t\ln(t)-t}$.
2. Résoudre les problemes de Cauchy suivants :
   (a) $y' + y = \frac{1}{1+e^t} + t\,; \quad y(0) = 1$.
   (b) $y' + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{ch} t} e^t y = 0\,; \quad y(1) = 0$.
3. Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :
   (a) $y' - 3y = 2$.
   (b) $y' + 2y = e^{2t}$.
   (c) $y' - 5y = e^{5t}$.
   (d) $y' + 3t^2 y = t^2$.
   (e) $y' - y = \sin t$.
   (f) $(1 + t^2)y' - ty = 1 + t + t^2$.
4. On considere l'équation différentielle

   $$(E) \qquad (1 - t^2)y' - 2ty = 1 \quad .$$

   (a) Résoudre sur $]-1, +1[$ l'équation différentielle (E).
   (b) Déterminer la solution qui pour $t = 0$ prend la valeur 1.
   (c) Résoudre (E) sur $]-\infty, -1[$.
5. Résoudre les équations différentielles suivantes, en précisant soigneusement l'intervalle de résolution :
   (a) $(\cos t)\, y' - (\sin t)\, y + \cos t = 0\,.$
   (b) $y' + (\operatorname{tg} t)\, y = \sin t\,.$

(c) $t^3 y' + 4(1-t^2)y = 0$.

(d) $y' + (\operatorname{tg} t)\, y = \cos t$.

(e) $(\operatorname{tg} t)\, y' + y - \sin t = 0$.

6. (a) Calculer
$$\int \tan(t)dt, \qquad \int \frac{x^2}{(1-x^2)(x+1)}dx.$$
(b) Calculer
$$\int \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\tan(t)}dt$$
(suggestion : on pourra utiliser les regles de Bioches, une fois remarqué que la fonction $f(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)+\tan(t)}$ est impaire).

(c) En utilisant les primitives calculées au point précédent, résoudre l'équation différentielle
$$y' - \tan(t)y = \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}$$
sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(d) Déterminer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle au point précédent telle que $y(0) = 1$.

2 Équations du second ordre.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y'' - 5y' + 6y = 0$.
   (b) $y'' - 3y' = 0$.
   (c) $y'' - 2y + 1 = 0$.
   (d) $4y'' + 4y + 1 = 0$.
   (e) $y'' - 2y' + 2y = 0$.
   (f) $y'' + y + 7 = 0$.
2. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y'' + 2y' - 8y = e^{3t}$.
   (b) $y'' - 3y' - 18y = te^{4t}$.
   (c) $y'' - 10y' + 41y = \sin t$.
   (d) $y'' - y' = t + 1$.
   (e) $y'' - 2y' + 5y = t\cos 2t$.
   (f) $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3t}$.
   (g) $y'' - 2y' + 2y = te^t \sin t + 3$.
3. Résoudre les équations différentielles suivantes :
   (a) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3t}}{1+e^t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.
   (b) $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(t-1)(t+2)}$, $t \in]-2, 1[$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.