

1) La fonction Arccos.

La fonction

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x)$$

n'est pas surjective. En effet, le réel 2 n'a pas d'antécédent par \cos : il n'existe pas de réel x tel que $\cos(x) = 2$. Ainsi, la fonction \cos n'est pas surjective, donc encore moins bijective, et ne peut pas admettre une fonction réciproque $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, par le cours (rappel : une fonction admet une fonction réciproque si et seulement si elle est bijective).

Une solution pourrait être de voir le cosinus comme une fonction de \mathbb{R} dans $[-1, 1]$. Dans ce cas, elle est effectivement surjective (voir cours sur le cosinus dans le chapitre nombres complexes : tout nombre réel $\alpha \in [-1, 1]$ est le cosinus d'au moins un réel, car la droite verticale d'équation $x = \alpha$ intersecte le cercle unité en au moins un point).

Mais la fonction cosinus, même vue comme une fonction $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, n'est pas injective : par exemple, on a $0 \neq 2\pi$ et pourtant $\cos(0) = \cos(2\pi)$. Comme elle n'est pas injective, elle n'est pas surjective non plus, et donc n'admet pas de fonction réciproque.

La solution consiste donc à restreindre le cosinus à une partie suffisamment petite de \mathbb{R} pour que la fonction devienne injective (mais pas trop petite quand même pour que ça reste intéressant : par exemple, si on restreint à un point, ça va être injectif bien sûr...en fait on veut rétrécir le domaine de définition pour que ça devienne injectif, mais que ça reste surjectif sur $[-1, 1]$ en même temps). Une étude de la fonction cosinus permet de constater que la fonction est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, et donc injective sur cet intervalle (une fonction strictement monotone est injective, c'est démontré dans le cours pour strictement croissant).

On obtient donc une fonction restreinte $\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, qui est injective. Il est facile de voir qu'elle est également surjective : tout réel $\alpha \in [-1, 1]$ est le cosinus d'un angle dans $[0, \pi]$ car la droite verticale d'équation $x = \alpha$ intersecte la moitié supérieure du cercle unité en au moins un point. En fait, en exactement un point, ce qui permet de démontrer l'injectivité d'une autre façon, plus élémentaire. Finalement, la fonction

$$\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective. Elle admet donc une fonction réciproque, que l'on note par définition Arccos .

Remarque importante : on aurait pu choisir un autre intervalle que $[0, \pi]$ sur lequel \cos est bijective. Ceci aurait donné une autre fonction réciproque, qui *n'est pas* Arccos .

Résumé : La fonction $\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ est la fonction réciproque de $\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, ce qui veut dire par définition que :

$$\text{Arccos} \circ (\cos|_{[0, \pi]}) = \text{Id}_{[0, \pi]}, \text{ et}$$

$$(\cos|_{[0, \pi]}) \circ \text{Arccos} = \text{Id}_{[-1, 1]}.$$

Propriétés élémentaires : La fonction Arccos est positive et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

On a $\text{Arccos}(-1) = \pi$, $\text{Arccos}(-1/2) = 2\pi/3$, $\text{Arccos}(0) = \pi/2$, $\text{Arccos}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$, $\text{Arccos}(1) = 0$.

Très important : La définition de Arccos signifie les deux choses suivantes :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \text{Arccos}(\cos(x)) = x, \text{ et}$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\text{Arccos}(x)) = x.$$

Par contre, l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arccos}(x)) = x)$ n'a pas de sens, car Arccos n'est pas définie sur \mathbb{R} , et l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arccos}(\cos(x)) = x)$ a un sens mais est fausse, car par exemple $\text{Arccos}(\cos(2\pi)) = 0 \neq 2\pi$.

Question : si x est un réel, que vaut $\text{Arccos}(\cos(x))$?

Déjà, la fonction

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi], x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x))$$

est 2π -périodique et paire car le cosinus l'est. Il suffit donc de la déterminer par exemple, sur $[0, \pi]$. Mais si $x \in [0, \pi]$, on a par définition $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$. Donc g est l'unique fonction paire, 2π -périodique, telle que si $x \in [0, \pi]$, on ait $g(x) = x$. Par exemple, $\text{Arccos}(\cos(3\pi/2)) = \pi/2$, $\text{Arccos}(\cos(5\pi/3)) = \pi/3$. On remarque que g est la fonction en dents de scie qui s'écrit aussi $g(x) = \text{distance}(x, 2\pi\mathbb{Z})$, qui à x associe la distance de x au multiple entier de 2π le plus proche.

Dérivée : La fonction $\cos|_{[0, \pi]}$ est dérivable sur $]0, \pi[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle ouvert. Par le cours, on en déduit que sa fonction réciproque Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$, et que pour tout $a \in] -1, 1[$, on a $\text{Arccos}'(a) = \frac{1}{\cos'(\text{Arccos}(a))} = \frac{1}{-\sin(\text{Arccos}(a))}$.

Or, pour tout $a \in] -1, 1[$, on a l'égalité (à savoir absolument) $\sin(\text{Arccos}(a)) = \sqrt{1 - a^2}$ (qui vient tout simplement du fait que $\sin^2(\text{Arccos}(a)) + \cos^2(\text{Arccos}(a)) = 1$). Finalement, La dérivée de Arccos sur $] -1, 1[$ est la fonction

$$\text{Arccos}' :] -1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Elle est strictement négative, ce qui redonne par le théorème des accroissement finis le résultat déjà connu que Arccos est strictement décroissante sur $] -1, 1[$.

2) La fonction Arcsin.

La fonction sinus n'est pas injective sur \mathbb{R} , car périodique. On la restreint à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, sur lequel est strictement croissante, et surjective sur $[-1, 1]$. Autrement dit, la fonction

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective, et admet donc une fonction réciproque, notée Arcsin, définie sur $[-1, 1]$.

Propriétés élémentaires : la fonction Arcsin est strictement croissante¹ sur $[-1, 1]$, et impaire. Quelques unes des valeurs à connaître sont : $\text{Arcsin}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\text{Arcsin}(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$, $\text{Arcsin}(0) = 0$, $\text{Arcsin}(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$, $\text{Arcsin}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$, $\text{Arcsin}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$, $\text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Très important : la définition de Arcsin signifie les deux choses suivantes :

$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \text{Arcsin}(\sin(x)) = x, \text{ et}$$

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\text{Arcsin}(x)) = x.$$

Par contre, l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\text{Arcsin}(x)) = x)$ n'a pas de sens, car Arcsin n'est pas définie sur \mathbb{R} , et l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arcsin}(\sin(x)) = x)$ a un sens mais est fausse, car par exemple $\text{Arcsin}(\sin(2\pi)) = 0 \neq 2\pi$.

Question : si x est un réel, que vaut $\text{Arcsin}(\sin(x))$?

Déjà, la fonction

$$h : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$$

est 2π -périodique et impaire car le sinus l'est. Il suffit donc de la déterminer par exemple, sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Mais si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a par définition $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$. Donc h est l'unique fonction impaire, 2π -périodique, telle que si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on ait $h(x) = x$. C'est un autre exemple de fonction en dents de scie.

Dérivée : la fonction Arcsin est dérivable sur $] - 1, 1[$ et sa dérivée est :

$$\text{Arcsin}' :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La dérivée est strictement positive, ce qui fait que Arcsin est strictement croissante sur $] - 1, 1[$, mais on le savait déjà.

1. si une fonction strictement croissante admet une réciproque, alors la réciproque est strictement croissante (exercice)

3) La fonction Arctan.

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$. Elle n'est pas injective, car π -périodique. On la restreint à l'intervalle $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$, sur lequel est strictement croissante, et surjective sur \mathbb{R} . Autrement dit, la fonction

$$\tan \left|] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [: \right] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\rightarrow \mathbb{R}$$

est bijective, et admet donc une fonction réciproque, notée

$$\text{Arctan} : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [.$$

Propriétés élémentaires : la fonction Arctan est strictement croissante sur \mathbb{R} , et impaire. Elle tend vers $-\frac{\pi}{2}$ en $-\infty$, et vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$.

Très important : la définition de Arctan signifie les deux choses suivantes :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [, \quad \text{Arctan}(\tan(x)) = x, \text{ et}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\text{Arctan}(x)) = x.$$

Par contre, l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, \text{Arctan}(\tan(x)) = x)$ n'a pas de sens, car \tan n'est pas définie sur \mathbb{R} , et même lorsque l'expression est définie, elle est en général fautive, par exemple $\text{Arctan}(\tan(3\pi)) = \text{Arctan}(0) = 0$.

Question : si x est un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$, que vaut $\text{Arctan}(\tan(x))$?

La fonction

$$h : \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}, (x \mapsto \text{Arctan}(\tan(x)))$$

est π -périodique et impaire car la fonction tangente l'est. Il suffit donc de la déterminer par exemple, sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$. Mais si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on a par définition $\text{Arctan}(\tan(x)) = x$. Donc h est l'unique fonction impaire, π -périodique, telle que si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on ait $h(x) = x$. C'est une fonction qui n'admet pas de prolongement continu à \mathbb{R} .

Dérivée : la fonction Arctan est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est :

$$\text{Arctan}' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}.$$