Formulaire sur les fonctions hyperboliques et leurs réciproques.

1 Trigonométrie hyperbolique

Les définitions sont les suivantes :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}.$$

Elles sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. En ce qui concerne la parité, ch est paire, sh et th sont impaires. Un calcul direct donne la relation fondamentale $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch(x)^2 - sh(x)^2 = 1$. Les dérivées sont données par $ch'(x) = sh(x)$, $sh'(x) = ch(x)$ et $th'(x) = 1/ch^2(x) = 1 - th^2(x)$ pour tout réel x.

2 Fonctions hyperboliques réciproques

2.1 Argsh

La fonction sh est strictement croissante donc injective sur $\mathbb{R}$; de plus elle est continue et elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. On en déduit par une version légèrement améliorée du TVI qu'elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et admet donc une fonction réciproque, notée $Argsh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Notons que $ch^2(Argsh(x)) - sh^2(Argsh(x)) = 1$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}, ch(Argsh(x)) = \sqrt{1+x^2}$. La dérivée de Argsh est $Argsh'(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$. Preuve : on dérive $sh(Argsh(x)) = x$. Enfin, si $x \in \mathbb{R}$ et $y = Argsh(x)$, on a $e^y = sh(y) + ch(y) = x + \sqrt{1+x^2}$, d'où $Argsh(x) = y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

2.2 Argch

La fonction ch est strictement croissante donc injective sur l'intervalle $[0, +\infty[$, elle est continue et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on en déduit que son image est $[ch(0), +\infty[$. Autrement dit, $ch|_{[0,+\infty[}$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque notée $Argch$: $[1, +\infty[\to [0, +\infty[$. On a : $\forall x \in [1, +\infty[$, $sh(Argch(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$. La fonction $Argch$ est dérivable sur $]1, +\infty$ et sa dérivée sur cette intervalle est donnée par $Argch'(x) = 1/\sqrt{x^2-1}$. Enfin, on peut donner une expression explicite pour $Argch$:

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad Argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

2.3 Argth

Enfin, la fonction th est strictement croissante donc injective, de plus elle est continue et tend vers -1 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$, donc son image est $]-1, 1[$. On en déduit l'existence d'une fonction réciproque $Argth :]-1, 1[\to \mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$ et sur cet intervalle on a $Argth'(x) = 1/(1 - x^2)$. Enfin, on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, Argth(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Preuve : soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = Argth(x)$. Alors $x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$, d'où $e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$.

Important : à part nécessité absolue, il est déconseillé de remplacer systématiquement Argsh, Argch et Argth par leurs expressions explicites. Il vaut mieux les appeler par leur nom.