Chapitre 1

Rudiments de logique et rappels de fonctions usuelles

1.1 Préambule : ensembles classiques

Les objets avec lesquels on travaille en mathématiques sont initialement les ensembles et leurs éléments. Les ensembles classiques sont $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; on a aussi $\mathbb{N}^*$, ..., $\mathbb{C}^*$ (les mêmes privés de zéro) ; et enfin, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}_-$, etc pour des contraintes de signe (au sens large : 0 appartient à $\mathbb{Q}_+$ par exemple). On peut combiner : l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des réels strictement positifs.

Il y a beaucoup d'autres ensembles : ensembles finis, ensembles de fonctions, ensembles de matrices, de polynômes... comme on le verra dans la suite du semestre.

On écrit $A \subset B$ lorsque tous les éléments de A sont aussi dans B. On a par exemple les inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Si E est un ensemble, on écrit $x \in E$ pour dire que x est un élément de l'ensemble E. Par exemple, $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (preuve plus tard). Si A et B sont deux ensembles, on note $A \times B$ l'ensemble des couples du type (a, b), où $a \in A$ et $b \in B$. On note $A^2 = A \times A$. Par exemple, on peut écrire les choses suivantes : $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$, ou $(\pi, -1/2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{Q}$. On peut généraliser la définition du produit à plus de deux ensembles, par exemple $(2, 5, \sqrt{2}) \in \mathbb{R}^3$.

1.2 Propositions logiques

1.2.1 Définition. Une proposition est une phrase à laquelle on peut attribuer le statut « vraie » ou « fausse ». La phrase peut en outre comporter des symboles qui désignent des objets mathématiques (comme des chiffres) et d'autres symboles qui désignent des relations mathématiques entre objetys (par exemple l'égalité, inégalité, divisibilité, appartenance à un ensemble...)

Par exemple $2 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$ sont des propositions (la première est fausse, la seconde vraie). La phrase « le nombre complexe i est positif » (ou encore « quelle heure est-il ? ») n'est pas une proposition, on ne peut pas lui affecter de statut.

Une proposition peut dépendre d'un ou plusieurs paramètres. Un paramètre est un symbole qui désigne un élément non précisé d'un ensemble. Par exemple : « $x > 2$ », où x est un nombre réel. Le statut de cette proposition dépend de la valeur de x : elle est vraie si $x > 2$, elle est fausse si $x \leq 2$.

1.3 Construction de propositions

Considérons deux propositions A et B. Dans les exemples qui suivent, sauf précision, x est un nombre réel.

Conjonction : « A et B » La proposition « A et B » est vraie si A et B sont vraies. Elle est fausse dès que l'une au moins des deux est fausse.

Exemple : « $x > 2$ et $x < 5$ » est vraie si $x \in]2, 5[$. Elle est fausse sinon.

Disjonction : « A ou B » La proposition « A ou B » est vraie dès que l'une des deux est vraie, elle est fausse si les deux sont fausses. Lorsqu'on affirme que « A ou B »est vraie, l'un n'exclut pas l'autre.

Exemple : « $x > 2$ ou $x < 5$ » est vraie pour tout nombre réel x.

Négation : « non A » La proposition « non A » est vraie si A est fausse et inversement.

Implication logique : « $A \Rightarrow B$ » La proposition « $A \Rightarrow B$ »signifie par définition « B ou non-A ». Elle est vraie si A est fausse ou si B est vraie.
Exemples : $2+2 = 4 \Rightarrow 2 \times 2 = 4$ est vraie. $2+2 = 5 \Rightarrow 2 \times 2 = 4$ est vraie. $2+2 = 5 \Rightarrow 2 \times 2 = 5$ est vraie. $2+2 = 4 \Rightarrow 2 \times 2 = 5$ est fausse. Autre exemple : si x est un nombre réel, la proposition $x > 3 \Rightarrow x > 4$ est vraie pour $x \leq 3$ ou pour $x > 4$. Elle est fausse si $3 < x \leq 4$.

Attention : le symbole $\Rightarrow$ n'est en aucun cas une abréviation pour « donc ». La proposition $A \Rightarrow B$ ne veut pas dire « A est vraie donc B est vraie »!

Équivalence logique : « $A \Leftrightarrow B$ » La proposition « $A \Leftrightarrow B$ » signifie par définition « $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ ». Elle est vraie si A et B ont même statut, que ce soit vrai ou faux. Elle est fausse si A et B ont des statuts différents.
Exemples : $2+2 = 5 \Leftrightarrow 2 \times 3 = 7$ est vraie. $1 > 0 \Leftrightarrow 2+2 = 4$ est vraie. Si x est un nombre réel, la proposition $x > 3 \Leftrightarrow x < 4$ est vraie pour $x \in]3, 4[$. Elle est fausse sinon.

1.4 Quantificateurs

Soit $A(x)$ une proposition dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E (exemple : « $x > 3$ », où $x \in \mathbb{Z}$).

Quantificateur universel : $\forall$ (quelque soit/pour tout)
La proposition « $\forall x \in E,\ A(x)$ » se lit « pour tout x dans E, $A(x)$ ». Elle est vraie si $A(x)$ est vraie pour toutes les valeurs que peut prendre x dans l'ensemble E. Elle est fausse dès qu'il existe une valeur spéciale de x pour laquelle $A(x)$ est fausse. Attention, contrairement à la proposition $A(x)$, la proposition $\forall x \in E,\ A(x)$ est une proposition qui ne dépend d'aucun paramètre : elle est soit vraie soit fausse : on dit que x est une variable muette, ou interne. Exemples : $\forall x \in R,\ x^2 > 1$ est fausse. La proposition $\forall x \in \mathbb{Z}^*,\ x^2 \geq 1$ est vraie.

Quantificateur existentiel : $\exists$ (il existe)
La proposition « $\exists x \in E / A(x)$ » se lit « il existe x dans E tel que $A(x)$ ». Elle est vraie s'il y a une valeur de x dans l'ensemble E telle que $A(x)$ soit vraie. Elle est fausse si $A(x)$ est fausse pour toutes les valeurs de x.

1.5 Conventions sur la véracité des propositions

Dans le cours, les propositions précédées des mentions « thèorème », « Proposition », « Lemme », etc, sont vraies. Les propositions mathématiques dans vos copies doivent par convention également être vraies. Quand on affirme qu'une propositoin est vraie, c'est soit un axiome (on admet que c'est vrai), soit (en général) on donne une démonstration.

1.5.1 Théorème. *On a les équivalences suivantes :*
non (non A) $\Leftrightarrow$ *A.*
non (A ou B) $\Leftrightarrow$ *(non A) et (non B).*
non (A et B) $\Leftrightarrow$ *(non A) ou (non B).*
$(\forall x \in E,\ A(x)) \Leftrightarrow (\forall y \in E,\ A(y))$.
$non(\forall x \in E,\ A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E,\ non(A(x)))$.
$non(\exists x \in E,\ A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E,\ non(A(x)))$.

Démonstration : voir TD.

1.6 Méthodes de démonstration

Démonstration directe

Exemple : soit $n \in Z$; montrer que « n pair $\Rightarrow n^2$ pair ».
Exemple de rédaction:
Si n est pair, il existe $k \in Z$ tel que $n = 2k$. Alors, $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ est pair. (et si n est impair, l'implication est vraie par définition, il n'y a rien à prouver).$\square$

Démonstration par contraposée

Principe : $(A \Rightarrow B)$ est équivalente à (non-$B \Rightarrow$ non-A).
Preuve du principe : (non-$B \Rightarrow$ non-A) $\Leftrightarrow$ (non-A ou $non - non - B$) $\Leftrightarrow$ (B ou $non - A$)$\square$.
Exemple d'application : soit $n \in Z$; montrer que n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.
Exemple de rédaction:
On va montrer la contraposée, autrement dit on va montrer « n impair $\Rightarrow n^2$ impair », qui est équivalente, mais plus facile à montrer. Supposons donc n impair. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. Mais alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.
En combinant avec le résultat précédent, on a donc prouvé : « n^2 pair $\Leftrightarrow n$ pair »$\square$

Démonstration par l'absurde

Principe : Si F désigne n'importe quelle proposition fausse, on a $A \Leftrightarrow$ (non-$A \Rightarrow F$).
Preuve du principe : (non-$A \Rightarrow F$) $\Leftrightarrow$ (F ou non-non-A) $\Leftrightarrow A$.
Donc pour montrer A, il suffit de supposer A faux et d'en déduire une contradiction (c'est-à-dire n'importe quelle proposition fausse).
Exemple d'application : Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Exemple de rédaction:
Par l'absurde, supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers p et q premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = p/q$. Donc $p = q\sqrt{2}$ et donc $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc par l'exemple précédent p est pair. Donc il existe $k \in Z$ tel que $p = 2k$, d'où en remplacant $4k^2 = 2q^2$, donc en simplifiant q^2 est pair donc q est pair. Donc p et q sont tous les deux pairs, contradiction car ils sont premiers entre eux. Finalement cette contradiction prouve que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.$\square$

Démonstrations de propositions avec quantificateur universel

Pour démontrer $\forall x \in E,\ A(x)$, on écrit :
« Soit $x \in E$ un élément quelconque ».
Puis, on démontre $A(x)$.
Puis, pour conclure, on écrit : « x étant pris quelconque dans E, la propriété est bien démontrée ».

Exemple : Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + \cos(x) > 0$.
Exemple de rédaction:

Fixons $x \in \mathbb{R}$.
On distingue deux cas possibles suivant la valeur de x.
Si $0 \leq |x| < \pi/2$, alors $x^2 \geq 0$ et $\cos(x) > 0$ donc $x^2 + \cos(x) > 0$.
Si $\pi/2 \leq |x|$, alors $x^2 + \cos(x) \geq \pi^2/4 - 1 > 0$.
Comme x est quelconque, on a bien montré la propriété pour tout $x \in \mathbb{R}$.$\square$

Cas particulier : démonstrations par récurrence Dans le cas particulier où le quantificateur universel porte sur l'ensemble $\mathbb{N}$, on peut utiliser une méthode de preuve spécifique, la récurrence. Cette méthode de démonstration s'appuie sur le fait que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élement (ce qui est faux pour la plupart des autres ensembles classiques). Il suffit alors de montrer d'une part que $A(0)$ est vraie, ce qui est généralement facile, puis de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A(n) \Rightarrow A(n+1)$. La première étape est cruciale et le raisonnement est faux si on l'omet.

Démonstrations de propositions avec quantificateur existentiel

Pour démontrer « $\exists x \in E/A(x)$, il faut soit construire un élément x tel que $A(x)$ soit vrai, soit utiliser un théorème qui affirme l'existence d'un tel objet, ou qui affirme l'existence d'un objet à partir duquel on peut obtenir l'existence de x.

Exemple 1 : soit f une fonction croissante de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est majorée, autrement dit montrer que $(\exists M \in \mathbb{R}/(\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq M))$.
Exemple de rédaction:
Posons $M = f(1)$. On a bien $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq f(1) = M$, car f est croissante.$\square$

Exemple 2 : Montrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.
Exemple de rédaction:
Considérons le nombre réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Il est soit rationnel, soit irrationnel. Dans le premier cas, il suffit de poser $a = b = \sqrt{2}$ (irrationnels, voir exemple plus haut) et la preuve est terminée. Dans le second cas, il suffit de poser $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (qui est supposé irrationnel) et $b = \sqrt{2}$ On a alors $a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$.$\square$

Ce deuxième exemple montre que parfois, on n'a pas besoin de construire explicitement l'objet, seulement de montrer que ça existe, soit par l'analyse de cas de figure complémentaires, soit en utiisant un théorème qui affirme l'existence d'un certain objet sans forcément l'expliciter. Cela dit, la plupart du temps, il faut construire l'objet.

1.7 Résolution des équations

Soit $A(x)$ une proposition portant sur $x \in E$. Résoudre $A(x)$, c'est déterminer exactement l'ensemble des x tels que $A(x)$ soit vrai. Cet ensemble est un sous-ensemble de E, on l'appelle l'ensemble des solutions. Il peut parfois être vide (aucune solution) ou égal à E (équation triviale).

Méthode par équivalence
$A(x) \Leftrightarrow B(x) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow C(x)$ et on sait facilement résoudre $C(x)$ (méthode rare).

Méthode par conditions nécessaires et suffisantes
Lorsque $A(x) \Rightarrow B(x)$, on dit que $B(x)$ est une condition nécessaire à $A(x)$, et $A(x)$ est une condition suffisante pour $B(x)$.
Dans la pratique, on écrit $A(x) \Rightarrow B(x) \Rightarrow ...x \in \Omega$. Ensuite, parmi les éléments de Ω, on détermine ceux qui sont solution.

Exemple : résoudre $|x-1| = 2x+3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
Exemple de rédaction:
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a la chaîne d'implications $|x-1| = 2x+3 \Rightarrow |x-1|^2 = (2x+3)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 4x^2+12x+9 \Leftrightarrow 3x^2+14x+8 = 0 \Leftrightarrow (x \in \{-4; -2/3\})$. Réciproquement, on vérifie que -4 n'est pas solution mais que $-2/3$ est solution. Finalement, l'équation a une unique solution, $-2/3$.□

1.8 Ensembles et fonctions, suite

ENsembles finis, notation $\{a, b, c\}$ et $[\![a, b]\!]$

1.8.1 Définition (Restriction d'un ensemble)**.**

1.8.2 Définition (Union, intersection et complémentaire de parties)**.**

1.8.3 Définition (Applications entre ensembles)**.**

1.8.4 Définition. Soient A et B deux ensembles, et $f : A \to B$ une application. On dit que f est <u>injective</u> si

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y,$$

autrement dit si (contraposée)

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$

autrement dit si deux éléments distincts ont toujours des images distinctes. On dit aussi que f « sépare les points ».

1.8.5 Définition. On dit que f est <u>surjective</u> si

$$\forall b \in B, \quad \exists a \in A / f(a) = b,$$

autrement dit tout élément $b \in B$ a (au moins) un antécédent par f.

1.8.6 Définition. On dit que f est bijective si elle est injective et surjective.

1.8.7 Exemple. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ n'est ni injective, ni surjective. Elle n'est pas injective car bien que 1 soit différent de -1, ils ont la même image. Elle n'est pas surjective car -2 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$: on ne peut pas trouver de réel x tel que $x^2 = -2$.

1.8.8 Exemple. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ n'est pas injective pour les mêmes raisons que f, mais elle est surjective : l'ensemble d'arrivée est cette fois $\mathbb{R}_+$, et tout nombre réel positif $y \geq 0$ a au moins un antécédent, par exemple $-\sqrt{y}$.

1.8.9 Exemple. La fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ est injective et surjective, donc bijective. Elle est surjective pour la même raison que g, elle est injective, car si x et y sont des réels positifs ayant même carré, ils sont forcément égaux (ils sont positifs donc il n'y a pas l'ambiguité de signe).

En général, la surjectivité est plus dure à montrer que l'injectivité, car il faut résoudre une équation à paramètre : l'équation $f(x) = y$, de paramètre y, et d'inconnue x, et ce pour tous les paramètres y. La non surjectivité est en revanche souvent plus facile à montrer, il suffit de trouver un élément qui n'a pas d'antécédent, en général ça se voit (éventuellement après un petit calcul / majoration / développement d'expression).

1.8.10 Remarque. Si $f : A \to B$ est injective, alors on peut « identifier »A à un sous-ensemble de B grâce à f : un élément $a \in A$ est identifié à $f(a) \in B$. Cette identification n'est pas abusive grace à la propriété d'injectivité. La formulation correcte de cette identification est que f induit une bijection de A sur $f(A)$. Ceci n'est qu'une remarque.

1.8.11 Définition (Restriction et prolongement d'une application)**.**

1.9 Logarithme, exponentielle, et autres fonctions usuelles

1.9.1 Proposition–Définition. Soit x un réel. Il existe un unique entier relatif $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leq x < k+1$. On appelle cet entier la partie entière de x et on le note $\lfloor x \rfloor$. Ceci définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, surjective (non injective bien sûr).

Par exemple, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -1.356 \rfloor = -2$.

1.9.2 Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle valeur absolue et on note $|x|$ le réel positif $\sqrt{x^2}$. Ceci définit une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

1.9.3 Proposition–Définition. On admet les faits suivants :

1. Il existe une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On l'appelle l'exponentielle et on la note exp. On note e le réel $exp(1)$.
2. Cette fonction vérifie $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, exp(x+y) = exp(x)exp(y)$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{Z},\ exp(n) = e^n$. Si $x \in \mathbb{R}$, on note par analogie $e^x = exp(x)$.
3. La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle possède donc une fonction réciproque que l'on note ln et que l'on appelle logarithme népérien.
4. On a donc par définition : $\forall x \in \mathbb{R},\ ln(e^x) = x$ et $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ e^{\ln(y)} = y$.
5. La fonction ln est dérivable, c'est une primitive de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
6. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.
7. Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit $a^x = e^{x \ln(a)}$.

Les résultats admis sont difficiles. Leur preuve demande soit le théorème de Cauchy-Lipschitz sur l'existence de solutions d'équations différentielles, soit le théorème d'existence de primitives de fonctions continues, soit la théorie des séries de fonctions, soit quelque chose d'autre, mais dans tous les cas quelque chose d'assez élaboré. Cauchy-Lipschitz sera démontré en S2 ainsi que le théorème sur les primitives, les séries de fonctions seront vues en S3. Le fait d'admettre le résultat ici n'entraîne pas de trou logique grave.

1.10 Congruences

1.10.1 Proposition–Définition. Soient x et y réels, et $a \neq 0$ un réel non nul. Alors on a :

$$\frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, x - y = ka) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} \,/\, x = y + ka).$$

On dit que x est congru à y modulo a, et on écrit $x \equiv y\ [a]$ si une des conditions équivalentes ci-dessus est vérifiée, autrement dit si le réel $x - y$ est un multiple entier (positif ou négatif) de a.

1.10.2 Exemples.
$1 \equiv 5\ [2]$, car $1 - 5 = -4$ est un multiple de 2.
$4 \equiv -9\sqrt{3} + 4\ [\sqrt{3}]$, car $4 - (-9\sqrt{3} + 4) = 9\sqrt{3}$ est un multiple de $\sqrt{3}$.
$\pi/3 \equiv 7\pi/3\ [2\pi]$, car $\pi/3 - 13\pi/3 = -12\pi/3 = -4\pi$ est un multiple de 2π.

1.10.3 Proposition (la congruence est une relation d'équivalence)**.** *On a :*
$(x \equiv y\ [a]) \Leftrightarrow (y \equiv x\ [a])$ *;*
$x \equiv x\ [a]$ *;*
$(x \equiv y\ [a]$ *et* $y \equiv z\ [a]) \Rightarrow (x \equiv z\ [a]$.

Preuve. Évident sur la définition.□

1.10.4 Proposition (addition et multiplications de congruences)**.** *Soit* $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$ *des réels non nuls, et* x, y, x', y' *des réels tels que* $x \equiv y\ [a]$ *et* $x' \equiv y'\ [a]$. *Alors :*

i) $x + x' \equiv y + y'$ $[a]$.
ii) $bx \equiv by$ $[ab]$.

Preuve.
i) Par la proposition précédente, on a $\frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{x'-y'}{a} \in \mathbb{Z}$. Donc $\frac{x-y}{a} + \frac{x'-y'}{a} \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\frac{(x+x')-(y+y')}{a} \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x + x' \equiv y + y'$ $[a]$.
ii) On a :

$$(x \equiv y\ [a]) \Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{bx-by}{ba} \in \mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow (bx \equiv by\ [ab]).$$

□

1.10.5 Exemple (très important pour la suite)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'équation

$$n\theta \equiv 0\ [2\pi],$$

d'inconnue $\theta \in [0, 2\pi[$, admet n solutions. En effet, on a

$$n\theta \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0\ [2\pi/n] \Leftrightarrow \left(\exists k \in [\![0, n-1]\!] / \theta = \frac{2k\pi}{n}\right).$$

1.10.6 Proposition. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe un unique réel $y \in [0, a[$ tel que $x \equiv y \quad [a]$.*

Preuve. Soit $y \in [0, a[$. On a donc $0 \leq \frac{y}{a} < 1$, donc $-\frac{y}{a} \leq 0 < 1 - \frac{y}{a}$. En ajoutant $\frac{x}{a}$ aux trois membres on obtient : $\left(\frac{x-y}{a}\right) \leq \frac{x}{a} < 1 + \left(\frac{x-y}{a}\right)$. On en déduit les équivalences suivantes :

$$\frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x-y}{a} = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor \Leftrightarrow y = x - a.\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor.$$

Ceci montre qu'il existe un unique réel $y \in [0, a[$ tel que $\frac{x-y}{a} \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire tel que $x \equiv y \quad [a]$. Il est donné par $y = x - a.\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$. □

1.11 Fonctions trigonométriques

On se place dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 centrée en l'origine. Il a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = 1$. On le note $\mathcal{C}$. Si $M \in \mathcal{C}$, alors l'angle $\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})}$ est la longueur de l'arc de cercle entre le point de coordonnées $(1, 0)$ et M, dans le sens trigonométrique. On ne donne pas la définition mathématique précise de longueur d'arc, mais la notion est intuitive.

1.11.1 Définition. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On admet qu'il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que $\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{OM})} = \theta$. On définit les réels $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ comme étant les seuls qui vérifient la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \cos(\theta)\ \vec{u} + \sin(\theta)\ \vec{v}.$$

Autrement dit $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les coordonnées du point M.

1.11.2 Remarque. Pareil que pour l'exponentielle : le résultat admis est difficile à montrer, pour exactement les mêmes raisons. Le lien sera fait dans le chapitre sur les nombres complexes.

Voici une table donnant les valeurs classiques des cosinus et sinus, à connaître par cœur.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/6$	π
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

1.11.3 Proposition. *Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors :*

- $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$, *car M est sur le cercle trigonométrique donc ses coordonnées sont comprises entre -1 et 1.*
- $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = 1$, *car* $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = || \overrightarrow{OM} ||^2 = 1^2 = 1$.

Prolongement par 2π-périodicité

1.11.4 Définition. Soit x un nombre réel. Soit y l'unique réel tel que $0 \leq y < 2\pi$ et $x \equiv y \quad [2\pi[$. Alors, par définition, on note $\cos(x) := \cos(y)$, et $\sin(x) := \sin(y)$. Ceci fait de sin et cos des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, et plus seulement sur $[0, 2\pi[$.

1.11.5 Remarque. Soit $x \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{Z}$. Alors, $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$, et $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$. On dit que sin et cos sont 2π-périodiques.

1.11.6 Proposition (symétries remarquables)**.** *Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\sin(-x) = -\sin(x); \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x); \quad \sin(\pi - x) = \sin(x);$$

$$\cos(x) = \cos(-x); \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x); \quad \cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x).$$

1.11.7 Proposition (premières formules de trigo)**.** *Soient a et b deux réels. Alors :*

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

Preuve. Notons $\overrightarrow{OM} = \cos(a) \overrightarrow{u} + \sin(a) \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{ON} = -\sin(a) \overrightarrow{u} + \cos(a) \overrightarrow{v}$. Alors $(0, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est un nouveau repère orthonormé direct. Notons alors P le point tel que $\overrightarrow{OP} = \cos(a + b) \overrightarrow{u} + \sin(a + b) \overrightarrow{v}$. En décomposant ce vecteur suivant le repère $(0, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ on obtient :

$$\overrightarrow{OP} = \cos(b) \overrightarrow{OM} + \sin(b) \overrightarrow{ON}.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer.□

1.11.8 Proposition. *Soient x et y deux réels. Alors, on a les équivalences suivantes :*

$$\sin(x) = \sin(y) \quad \Leftrightarrow \quad (x \equiv y \quad [2\pi] \ \mathit{OU}\ x \equiv \pi - y \quad [2\pi])$$

$$\cos(x) = \cos(y) \quad \Leftrightarrow \quad (x \equiv y \quad [2\pi] \ \mathit{OU}\ x \equiv -y \quad [2\pi])$$

$$\begin{cases} \sin(x) = \sin(y) \\ \cos(x) = \cos(y) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \equiv y \quad [2\pi]$$

La preuve se fait en résolvant d'abord sur $[0, 2\pi[$. Sur ce domaine restreint, la résolution se fait en déterminant les points d'intersections de droites verticales et horizontales avec le cercle trigonométriqe. Ce dernier a pour équation $x^2 + y^2 = 1$, on se ramène alors à des équations de degré deux (trinômes du second degré) faciles à résoudre. On trouve à chaque fois une ou deux solutions. Pour finir, on repasse aux solutions réelles en ajoutant les congruences.

1.12 Exercices sur ce chapitre

1.12.1 Démonstrations de propositions avec quantificateurs

1.12.2 Démonstrations par récurrence

1.12.3 Résolution d'(in)équations

1.12.4 Congruences

1.12.5 Domaines de définition de fonctions

1.12.6 Fonctions usuelles