Interrogation no. 1. Nom et prénom :

Calculatrices interdites. Il est demandé de répondre aux questions sur cette feuille, et de justifier les réponses.

1. Mettre le nombre complexe $\frac{2-i}{2+i}$ sous forme algébrique, c'est-à-dire trouver les deux réels a et b tels que $a+ib=\frac{2-i}{2+i}$.

On a $\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)^2}{2^2-i^2}=\frac{3-4i}{5}$.

2. Résoudre l'équation $z^2-z+1=0$, d'inconnue complexe $z\in\mathbb{C}$.

Le discriminant de l'équation vaut -3, les solutions sont donc $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Rédaction plus détaillée : soit $z\in\mathbb{C}$. Alors,
$z^2-z+1=0 \Leftrightarrow (2z-1)^2=-3=(i\sqrt{3})^2$
$\Leftrightarrow \left(2z-1=i\sqrt{3} \text{ ou } 2z-1=-i\sqrt{3}\right)$
$\Leftrightarrow \left(z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Résoudre le système d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & 5\\ x+2y & = & 3\end{array}\right.$, d'inconnues réelles x et y.

Soient x et y réels. Alors, on a :

$$\left\{\begin{array}{c} x-y=5\\ x+2y=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} -3y=2 & (L_1\leftarrow L_1-L_2)\\ 3x=13 & (L_2\leftarrow L_2+2L_1)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=-3/2\\ x=13/3\end{array}\right.$$

4. On définit une fonction de variable réelle par $f: x\mapsto \frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$. Quel est le domaine de définition de f ? Préciser le domaine de dérivabilité et la dérivée. Tracer le tableau de variations (avec limites) en justifiant.

Si x est un nombre réel, alors l'expression $\frac{1}{x-1}+\ln\left(\frac{1-x}{x}\right)$ n'a de sens que si x est différent de 0 et 1 et si $\frac{1-x}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}>1 \Leftrightarrow x\in]0;1[$. Le domaine de définition de f est donc $D_f=]0;1[$. Sur ce domaine, elle est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables. Sa dérivée est donnée pour tout $x\in]0;1[$ par $f'(x)=-\frac{1}{x(x-1)^2}$. Elle est donc strictement négative sur $]0;1[$. La fonction f est donc strictement décroissante sur cette intervalle.