Corrigé détaillé de l'interrogation no. 2.

1. Voir le cours.

2. (a) On a $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{4} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$.

   (b) On a $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/6}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i(\pi/4-\pi/6)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/12}$.

   (c) Par identification, on en déduit $\cos(\pi/12) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin(\pi/12) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

3. L'équation $z^2 - (3+3i)z - 2 + 6i = 0$ est du type $az^2 + bz + c = 0$, où l'on a noté $a = 1$, $b = -3 - 3i$ et $c = -2 + 6i$. Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-3-3i)^2 - 4(-2+6i) = 8 - 6i$. Cherchons les racines carrées de Δ. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(x+iy)^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = -3 \end{cases}$. Les deux racines carrées de Δ sont $\delta = 3 - i$ et $-\delta = -3 + i$. Les solutions de l'équation sont donc $\frac{-b+\delta}{2a} = 3 + i$ et $\frac{-b-\delta}{2a} = 2i$.

4. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$, $x = Re(z)$ et $y = Im(z)$. Alors

$$z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1/\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1/\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = (\sqrt{2}+1)/2\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})/4 \\ y^2 = (\sqrt{2}-1)/2\sqrt{2} = (2-\sqrt{2}/4 \\ 2xy = 1/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} (x,y) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \\ \text{ou} \\ (x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} z = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \text{ou} \\ z = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{array} \right)$$

   (b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4} \Leftrightarrow \left(z = e^{i\pi/8} \text{ ou } z = -e^{i\pi/8} = e^{i9\pi/8}\right)$.

   (c) On en déduit que $e^{i\pi/8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, et donc que $\cos(\pi/8) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et que $\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 2 \quad (L_2 - L_1) \\ 5x = 29 \quad (3L_1 + 2L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 29/5 \\ y = 2/5 \end{cases}$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $\frac{1}{2x-1} + \ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right)$ a un sens ssi $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$, et si $\frac{2-x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-1)(x-2)}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow -(x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x \in]1; 2[$. Le domaine de définition de f est donc $]1; 2[$.