

### Interrogation no. 3.

Calculatrices et documents/accès réseau etc interdits. Tous les polynômes sont réels.

1. (2 pts) Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles, et  $f : A \rightarrow B$  une application. Donner la définition de «  $f$  est injective » et de «  $f$  est surjective ».
2. (2 pts) Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes. D'après le cours, si  $PQ = 0$ , alors  $P = 0$  ou  $Q = 0$ . Redémontrer ce résultat.
3. (2 pts) Définition du polynôme dérivé d'un polynôme  $P$ .
4. (2 pts) Soient  $P$  et  $Q$  des polynômes. Définition du polynôme composé  $P(Q)$ .
5. (2 pts) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $r \in \mathbb{R}$ . Donner deux définitions équivalentes de la phrase «  $r$  est une racine de  $P$  ».
6. (2 pts) Soit  $P$  un polynôme de degré 2, et soient  $a, b$  et  $c$  des réels distincts tels que  $P(a) = P(b) = P(c) = 0$ . D'après le cours, on a  $P = 0$ . Redémontrer ce résultat.
7. (2 pts) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $r \in \mathbb{R}$ . Donner deux définitions équivalentes de la phrase «  $r$  est une racine de  $P$  de multiplicité trois ».
8. (2 pts) Pour quels réels  $x$  l'expression  $\ln\left(\frac{e^{-x}-2}{(x+1)^2}\right)$  a-t-elle un sens ?
9. (2 pts) Évaluer le polynôme  $P = X^3 - 2X + 1$  en 2 puis en 1.
10. (2 pts) Effectuer la division euclidienne de  $P = X^3 - 2X + 1$  par  $X - 1$ .
11. (2 pts) Trouver les deux racines restantes de  $P$ .
12. (4 pts) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $A = X^n$ , et  $B = X^2 - 1$ . La division euclidienne de  $A$  par  $B$  décrit  $A = BQ + R$ . Que peut-on dire du degré de  $R$ ? Calculer  $R$ , par exemple en utilisant la formule du cours. (Ne pas chercher à poser la division, ça ne marchera pas, on ne connaît pas  $n$ ).